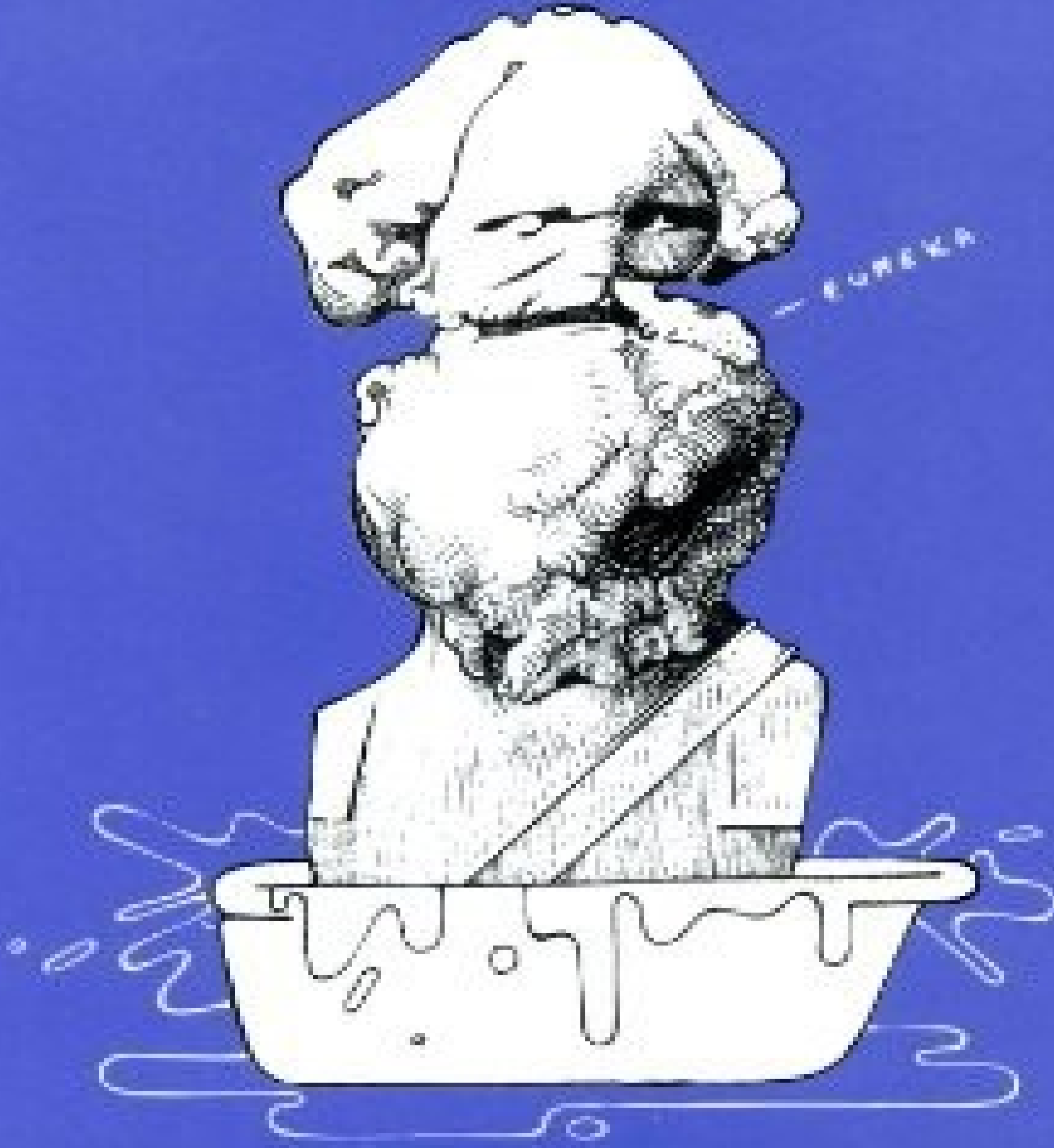
Paul Strathern

Arquimedes e a Alavanca

em 90 minutos



Jorge Zahar Editor

Arquimedes e a Alavanca em *90 Minutos*

Paul Strathern

Tradução: *Maria Helena Geordane*
Consultoria: *Carla Fonseca-Barbatti* - Mestranda em física, CBPF/CNPq

ZAHAR

Sobre o Autor

PAUL STRATHERN foi professor universitário de filosofia e matemática na Kingston University e é autor das séries "Cientistas em 90 minutos" e "Filósofos em 90 minutos", esta traduzida em mais de oito países. Escreveu cinco romances (entre eles *A Season in Abyssinia,* ganhador do Prêmio Somerset Maugham), além de biografias e livros de história e de viagens. Foi também jornalista *free-lance,* colaborando para o *Observer,* o *Daily Telegraph* e o *Irish Times.* Tem uma filha e mora em Londres.

Introdução

Arquimedes foi um dos três maiores matemáticos de todos os tempos — Newton e Gauss sendo em geral aceitos como seus únicos pares. Todos conhecemos o episódio do pulo que deu da banheira gritando "Eureca!" Quase tão conhecida é sua bravata: "Deem-me um ponto de apoio e uma alavanca e moverei a Terra." Isso se refere ao ponto de apoio e ao conhecimento que ele tinha de alavancas, mas, de certo modo, refere-se a muito, muito mais. Arquimedes de fato colocou o mundo em movimento e modificou toda a visão que tínhamos dele. Os gregos antigos transformaram a matemática primitiva e Arquimedes teve papel fundamental nisso — levando o assunto ao limiar do pensamento matemático moderno; onde, para todos os efeitos, ele se deixou adormecer por quase dois milênios. Infelizmente, o bastão passado por Arquimedes não teve quem o recebesse.

O pensamento científico de Arquimedes era parte essencial de sua matemática. Ele revolucionou a mecânica, criou a hidrostática e estabeleceu o estudo rigoroso dos sólidos mais complexos. A matemática implícita em tudo isso levou-o a inventar uma forma inicial de cálculo e conduziu-o a um conhecimento avançado da numerologia. Ele também alcançou a excelência prática. Figuraram entre suas invenções roldanas e alavancas, uma bomba d'água e uma forma elementar de laser. E pode muito bem ter havido mais — as quais ou ele não cuidou de anotar ou que desapareceram para sempre entre suas obras perdidas. Arquimedes não avaliava a importância de seu trabalho prático, raramente se preocupando em registrá-lo. Não obstante, os tratados que se conservaram, e que de fato são a memória de sua obra, permanecem tão extraordinários e lúcidos quanto à época em que foram escritos. Felizmente, a maioria deles é também fácil de compreender, mesmo por não-matemáticos. Essas obras propiciam uma percepção invulgar do trabalho de um espírito invulgar.

Nem mesmo um cérebro como o de Arquimedes, porém, surge do nada. Para compreender o que ele compreendeu e para apreciar o que ele fez com seu conhecimento, é necessário primeiramente ter uma noção de como era o mundo antes de sua entrada em cena.

O Mundo Como Arquimedes o Encontrou

As raízes da ciência residem na aprendizagem prática. Na realidade, essa aprendizagem é observada até em criaturas que não são práticas. A espera paciente do gato no buraco da toca do rato é uma prática científica. Os acontecimentos têm um padrão, que se espera seja repetido. (Enquanto isso, o rato, escapando por outro buraco, segue seu próprio caminho científico.)

A causalidade (conectando causa e efeito), a indução (inferindo uma lei geral a partir de instâncias particulares) e a ordenação (discernindo padrões físicos e temporais) — eis os impulsos científicos básicos. A ciência é a busca do sentido prático, ou seja, de uma explicação que possa ser *utilizada.* Essa foi a base da ciência humana dos tempos pré-históricos até a primeira parte do século XX. (Certos aspectos da teoria quântica e da cosmologia não se adéquam mais a essas normas científicas.)

A ciência do século XX mudou tudo, mas progressos significativos semelhantes tinham acontecido em épocas anteriores, como a edificação de Stonehenge, na Inglaterra, e a construção da Grande Pirâmide, no Egito, em torno de 2500 a.C. Ambos os monumentos incorporaram ideias religiosas e astronômicas cuja sofisticação não foi de todo apreciada, a não ser neste século. Uma minuciosa pesquisa em Stonehenge e nas pirâmides revelou um conhecimento matemático surpreendente. Os povos que os construíram entenderam em seus termos mais simples a relação entre os dois lados e a hipotenusa de certos triângulos retângulos (por exemplo, $a^2 + b^2 = c^2$). Em outras palavras, captaram os fundamentos daquilo que conhecemos como o Teorema de Pitágoras aproximadamente 2.000 anos antes do nascimento do próprio Pitágoras.

A principal fonte de inspiração científica e matemática, tanto para os antigos egípcios quanto para os megalíticos bretões, estava nos céus. O que acontecia nesses domínios superiores era visto com espanto. Os eventos pressagiavam as boas colheitas e as calamidades do verão. Aí reinavam a ordem, a regularidade e a certeza inflexível.

A Índia e a China, a Mesopotâmia e o Egito, assim como as Américas, compreenderam isso na mesma época. Essas civilizações tinham poucas semelhanças e, em certos casos, nenhuma espécie de contato — sugerindo que a astronomia pode ter proporcionado um tipo de gatilho evolutivo. Esse processo tem sido sugerido para justificar muitos dos “saltos” inexplicados que ocorreram, e continuam a ocorrer, na evolução, variando desde as células primitivas ao gênio humano.

A astronomia alcançou a maioridade em torno de 2500 a.C. e permaneceria como a “rainha das ciências” pelos quatro milênios seguintes. (Ecos desse longo reinado subsistem nas atitudes modernas tanto em relação às excentricidades astrológicas quanto no que diz respeito às “maravilhas” da cosmologia moderna.) Outro “salto” evolutivo da humanidade ocorreu entre os séculos VI e IV a.C., período que viu o súbito surgimento da Grécia antiga, do confucionismo e do taoísmo, ambos fundados na China, e do budismo instituído na Índia.

De longe, o mais significativo desses três acontecimentos, do ponto de vista intelectual, foi o despontar da Grécia antiga. Seu legado cultural foi a civilização ocidental, a qual deu origem à ciência, como hoje a compreendemos. O que aconteceu, então? A ciência se separou da religião. A astronomia marginalizou a astrologia. O domínio era antes da razão que da intuição. As explicações acerca do funcionamento do mundo eram então apoiadas em evidências, não mais na religião, na superstição ou em contos de fadas. Introduziu-se a prova na matemática. Os teoremas substituíram o procedimento habitual. As regras e as leis eram derivadas do estudo dos fenômenos naturais.

O motivo pelo qual o Teorema de Pitágoras tem seu nome vem do fato de Pitágoras ter sido o primeiro a *prová-lo.* Os gregos continuavam a acreditar nos deuses, mas desse ponto em diante o comportamento divino passou a estar sujeito aos limites da razão. (À exceção, naturalmente, dos milagres — que só podiam acontecer na ausência de observadores científicos.)

Pitágoras foi ainda mais além e declarou que o mundo fatalmente se comportaria segundo um modelo matemático. Ele foi o primeiro a dizer isso, no século VI a.C., e nós ainda cremos em sua afirmação. Embora não pelas mesmas razões, uma vez que ele acreditava que, em última instância, o mundo consistia em números. Essa crença pode nos parecer estranha ou mesmo completamente louca. No entanto, o motivo de a ciência moderna acreditar que tudo pode ser definitivamente explicado em termos de números é de fato muito menos convincente. É simplesmente um artigo de fé que cultivamos. Não tem qualquer justificação, prova ou apoio concreto — a não ser o fato de que escolhemos ver o mundo dessa maneira.

Pitágoras pode ter instituído a visão matemática do mundo, mas a visão científica grega foi estabelecida pelo filósofo Aristóteles. Essas duas grandes personalidades foram de fato consideradas filósofos em sua época. A ciência era parte da filosofia (que em grego antigo significa “amor à sabedoria”). Mais tarde, a ciência veio a ser conhecida como filosofia da natureza. Do mesmo modo, a palavra matemática, usada pela primeira vez por Pitágoras, veio do vocábulo grego *mathema,* que queria dizer “aquilo que se aprende”, ou ciência. Somente durante o milênio que se seguiu, as palavras filosofia, matemática e ciência gradualmente desenvolveram os significados independentes que possuem hoje.

A reunião de todo o conhecimento sob o termo filosofia favorecia a desordem. Para que os diferentes tipos de conhecimento progredissem, eles tinham de ser separados e categorizados. Essa foi a grande conquista científica de Aristóteles. Ele estabeleceu as leis para as diversas ciências. Infelizmente, sua maior paixão era a biologia e isso iria ter um efeito catastrófico. Da forma como a via, a biologia era fundamentalmente finalista. A fim de entender os órgãos que constituíam plantas e animais tínhamos de procurar descobrir para que serviam — ou seja, sua finalidade. Esse enfoque da biologia pode ter sido útil, mas seus efeitos sobre as demais ciências seriam desastrosos. Aristóteles insistia em ver o mundo antes como orgânico que como mecânico. Isso significava que, ao invés de seguirem causa e efeito, todos os objetos cumpriam uma finalidade. Seu comportamento fazia-os tender para o fim que estavam destinados a servir.

Como não havia nenhuma finalidade imediata aparente na astronomia, Aristóteles impôs uma. Os corpos celestes eram por natureza divinos, de forma que sua finalidade era se comportar de forma divina, o que significava que deviam se mover de maneira perfeita, eterna e imutável — em outras palavras, continuar a orbitar os céus em círculos perfeitos por toda a eternidade. A Terra, por outro lado, não era divina e não tinha, portanto, de se comportar desse modo. Ao contrário, ela permanecia estática, no centro do universo, com os corpos celestes girando ao seu redor.

Essa visão do universo iria prevalecer por mais de dois mil anos. A influência de Aristóteles na ciência foi imensamente benéfica em muitos campos, mas acabou por tornar-se negativa, impedindo novos progressos; em alguns campos, como a astronomia, foi um obstáculo ao progresso. Seu contemporâneo Heráclides já concluíra que Vênus e Mercúrio giravam em torno do Sol e que a Terra se movia através do espaço. E alguns anos após a morte de Aristóteles, Aristarco de Samos percebeu que a Terra orbitava o Sol e girava em torno de seu próprio eixo. Infelizmente, essas descobertas foram ignoradas porque não se ajustavam à visão teleológica (finalista) que Aristóteles tinha do mundo. Até mesmo Arquimedes, contemporâneo de

Aristarco, e de modo algum astrônomo medíocre, adotou a visão que Aristóteles tinha do sistema solar. Não foi por acaso que as principais conquistas de Arquimedes ocorreram em esferas menos afetadas pela teleologia orgânica aristotélica — ou seja, a física e a matemática.

Vida e Obra

Arquimedes nasceu em 287 a.C. em Siracusa, a mais poderosa cidade-estado grega na Sicília. Siracusa tinha por longo tempo aspirado a uma tradição de saber e sofisticação, embora com pouco sucesso. No século anterior, Platão passara ali dois períodos, tentando em vão instilar alguma cultura no grosseiro tirano local e seu filho inculto. Siracusa estava estrategicamente situada entre o Império Cartaginês em expansão no norte da África e o Império Romano embrionário — exigia-se algo um pouco mais resistente que filosofia ou arte para sobreviver.

Apesar disso, havia homens de cultura na cidade — e o pai de Arquimedes, Fídias, era um deles. Fídias era um aristocrata, um astrônomo de certo renome e, quase com certeza, um bom matemático também. Segundo seu filho, formulou cálculos estimando a proporção entre os diâmetros do Sol e da Lua.

Salvo alguns esparsos fragmentos de informação em seus tratados matemáticos e científicos, sabemos mais acerca de Arquimedes através do escritor romano Plutarco, que viveu três séculos mais tarde. Plutarco respeitava muitos aspectos da cultura grega antiga, e sua obra mais conhecida, *Vidas paralelas,* compara gregos eminentes com seus pares romanos. Contudo, os romanos simplesmente não estavam em harmonia com objetivos amplamente teóricos, como a matemática e a física, e Plutarco evidentemente não pensou muito em Arquimedes. O maior cientista da era clássica aparece como inserção passageira na biografia do general romano que inadvertidamente o mandou matar.

Arquimedes talvez tivesse algum parentesco com o rei Hierão II, soberano de Siracusa, e sabe-se que permaneceu ligado a ele vida afora. Presume-se até que tenha sido tutor do filho de Hierão.

Ainda jovem, foi para Alexandria, a fim de concluir sua educação. No início do século II a.C., Alexandria tornara-se o maior centro de conhecimento do mundo mediterrâneo, suplantando até Atenas. A cidade havia sido fundada apenas em 313 a.C. por Alexandre, o Grande, ao longo de sua campanha para conquistar o mundo. E lá foi sepultado o maior megalomaníaco da história, em um resplandecente esquife de ouro, em 323 a.C. (O local exato do túmulo de Alexandre perdeu-se para a história — embora fosse conhecido de Ptolomeu X, que furtivamente substituiu o esquife de ouro por uma réplica em alabastro quando precisou de dinheiro.)

A famosa Biblioteca de Alexandria foi fundada aproximadamente na época do nascimento de Arquimedes. Quando ele chegou à cidade, ela possuía quase com certeza cem mil rolos de pergaminho, inclusive o amplo acervo de Aristóteles (a maior biblioteca privada da era grega). A Biblioteca atraía eruditos de todo o mundo helenístico, firmando-se rapidamente como proeminente centro de conhecimento. Foi dirigida por alguns dos maiores eruditos da época. O grande geômetra Euclides talvez tenha morrido antes de Arquimedes chegar a Alexandria, mas certamente leu suas obras e estudou com alguns de seus discípulos.

O livro definitivo de Euclides, *Os elementos,* lançou as bases da geometria. Ele começa com um conjunto de definições simples e que dispensam explicações — “um ponto tem uma posição, mas nenhuma magnitude”, “uma linha é um comprimento sem largura”, “uma linha reta passa uniformemente entre seus pontos extremos”, e assim por diante. Usando essas definições, Euclides iniciou então a formulação de uma série de teoremas. Cada teorema que se seguia baseava-se num anterior, estabelecendo assim um procedimento extremamente rigoroso. (Inevitavelmente, mais tarde geômetras descobriram raras lacunas nessa obra-prima da sistematização. Mas não foi senão quando o russo Lobachevski desenvolveu uma geometria de superfícies curvas no século XIX que a universalidade da geometria euclidiana foi pela primeira vez seriamente questionada.) Outras partes de *Os elementos* diziam respeito à geometria sólida e à teoria dos números, dois campos nos quais Arquimedes se superaria.

Durante o tempo em que estudava em Alexandria, Arquimedes conheceu dois matemáticos com os quais iria se corresponder por toda a vida. Como passava a maior parte dos dias trabalhando sozinho em Siracusa, vale a pena conhecer a pouca informação disponível sobre esses dois espíritos afins que ele considerava colegas. Eram ambos ótimos matemáticos por seus próprios méritos, embora dificilmente pudessem se comparar a Arquimedes.

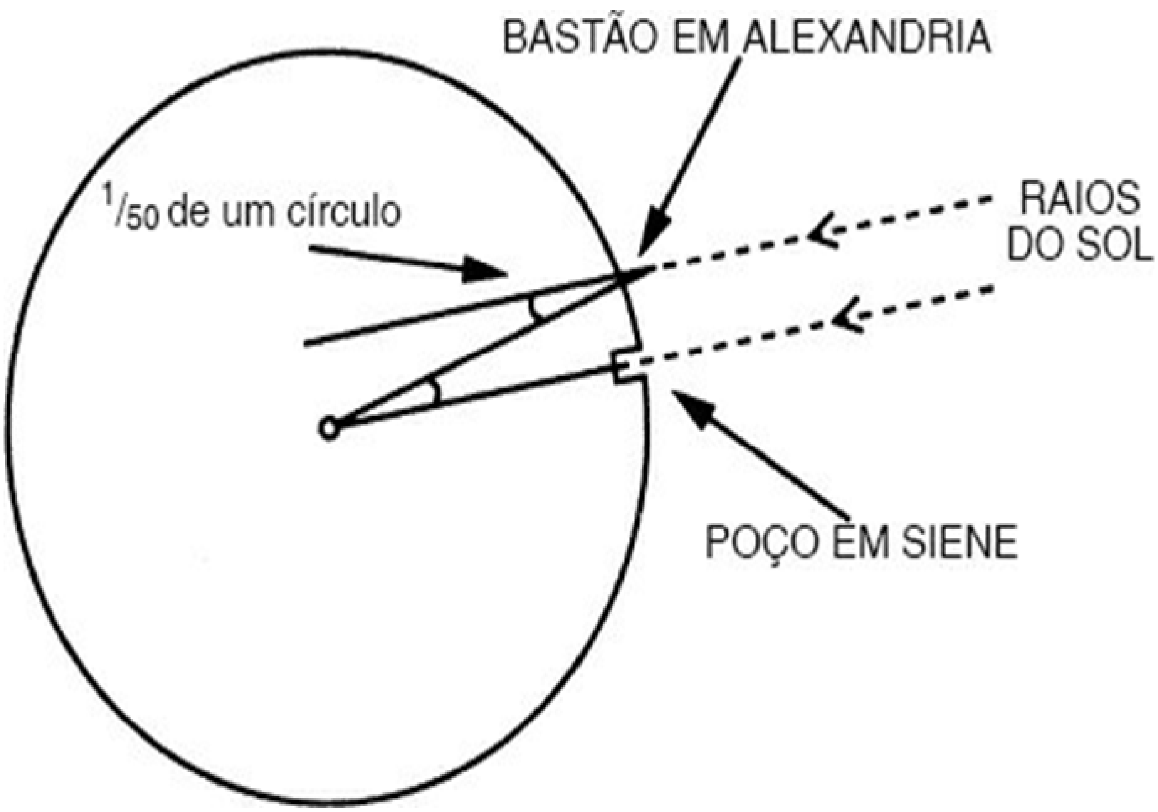
Conão de Samos era um amigo que quase certamente tinha ligações com Aristarco, um contemporâneo oriundo da mesma ilha. É provável que ele conhecesse sua teoria heliocêntrica antes de se dirigir a Alexandria; nesse caso, seguramente a teria discutido com Arquimedes. Conão também era destacado astrônomo e mantinha vínculos com a corte real de Alexandria. Dá- se a ele o crédito de ter descoberto uma nova constelação de sete estrelas de baixa luminosidade, que maliciosamente denominou *A cabeleira de Berenice* por conta de uma mecha perdida do cabelo da rainha.

Eratóstenes, outro grande colega de Arquimedes, era um temperamento bem mais interessante, versátil, que estudava de tudo, da geografia à comédia. É dele também o primeiro quadro cronológico da história grega a não incluir quaisquer mitos. Eratóstenes determinou que a história grega começara com a queda de Tróia, que ousadamente situou com precisão em 1184 a.C. (segundo nosso sistema cronológico). O cálculo foi extraordinariamente exato: eruditos modernos covardes afirmam que esse evento *provavelmente* se deu *em torno de* 1250 a.C.

Eratóstenes foi o criador da palavra “filólogo” (“amante do conhecimento” ou erudito), que usava para se autodescrever. Desenhou o primeiro mapa-múndi (Mediterrâneo) a incluir latitude e longitude. Também traçou o primeiro meridiano através de Alexandria, ao sul de Siene (hoje Assuã). Infelizmente, esse meridiano tinha um erro de mais de 25° — fato que qualquer marinheiro poderia ter-lhe apontado. (Mas os primeiros sábios não pensavam em se assessorar com peritos da área, tradição que se revelou uma das mais duradouras na educação dos gregos antigos.)

A inexatidão do meridiano de Eratóstenes iria afetar sua maior descoberta — mas não diminui seu brilho. Ele foi o primeiro a fazer um cálculo exato da circunferência da Terra. O modo como o fez continua a ser um testemunho eterno de seu gênio.

Eratóstenes sabia que num dia determinado, ao meio-dia, o Sol brilhava no fundo de um poço profundo em Cirene, indicando que estava exatamente a pino. Nesse mesmo dia, no mesmo horário em Alexandria, verificou que um bastão perpendicular lançava uma sombra correspondente a 1/50 de um círculo. Fez então cálculos com base na hipótese de que o Sol estava tão distante que seus raios eram virtualmente paralelos em ambos os lugares (hipótese surpreendentemente ousada para a época). Usando a distância conhecida entre Siene e Alexandria, foi capaz de deduzir que a circunferência da Terra era 50 vezes essa distância.



Considerando a natureza de seu equipamento (um bastão e um poço) e a informação técnica de que dispunha (o meridiano impreciso e vagas noções contemporâneas de distância), o resultado foi extraordinariamente exato — só se desviando 4% dos cálculos atuais.

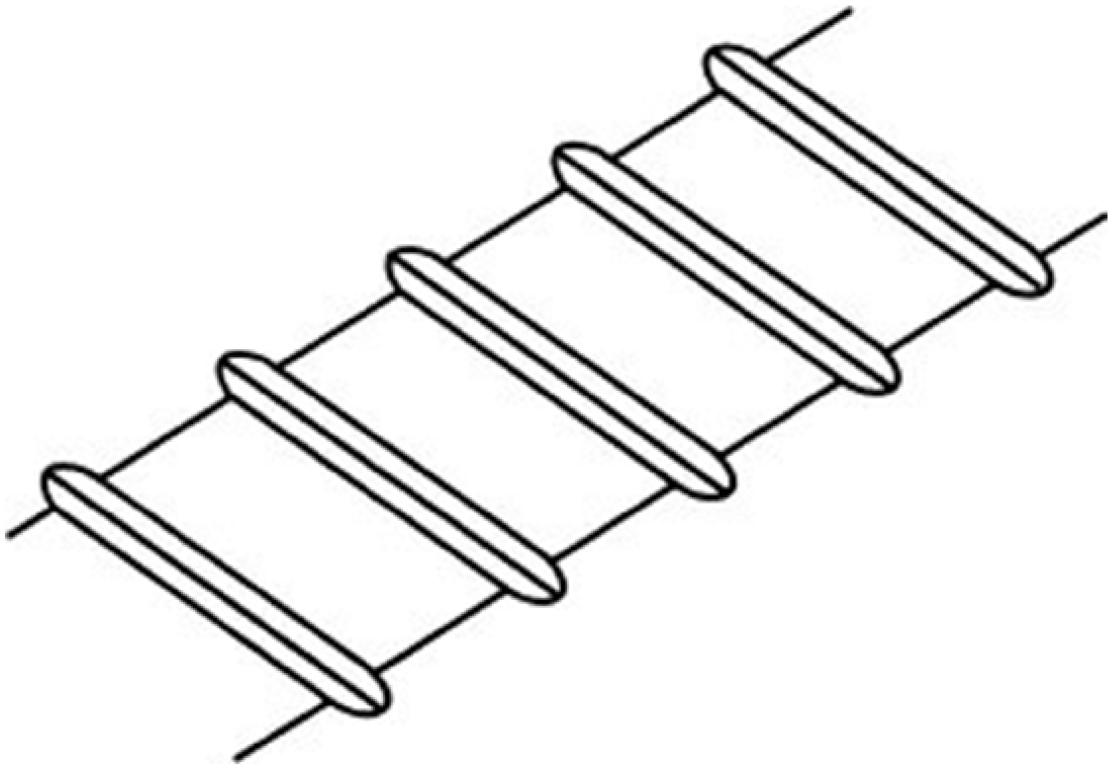
Eratóstenes tornou-se diretor da Biblioteca de Alexandria e pode perfeitamente ter vivido até a avançada idade de 80 anos (outro dado assombroso para a época). No final ficou cego e incapaz de ler, fato que provocou nele a reação extrema do bibliófilo — cometeu suicídio.

Quando Arquimedes deixou Alexandria, firmou-se a lenda de que viajara para a Espanha. Se assim foi, já devia ter-se tornado um talentoso engenheiro e inventor. Segundo um episódio mencionado por Leonardo da Vinci em seus cadernos de anotações, Arquimedes trabalhou como engenheiro militar para o rei Ecliderides de Cilodastri em uma guerra marítima contra os bretões. Consta que Arquimedes inventou uma máquina que disparava resina incandescente contra as naus inimigas. Outro relato mais verossímil, o do historiador siciliano Diodoro, que viveu no século I a.C., fala do Parafuso de Arquimedes, usado para bombear água das minas de prata do rio Tinto, no sul da Espanha. Diodoro afirma que Arquimedes inventou esse parafuso apenas com esse propósito.

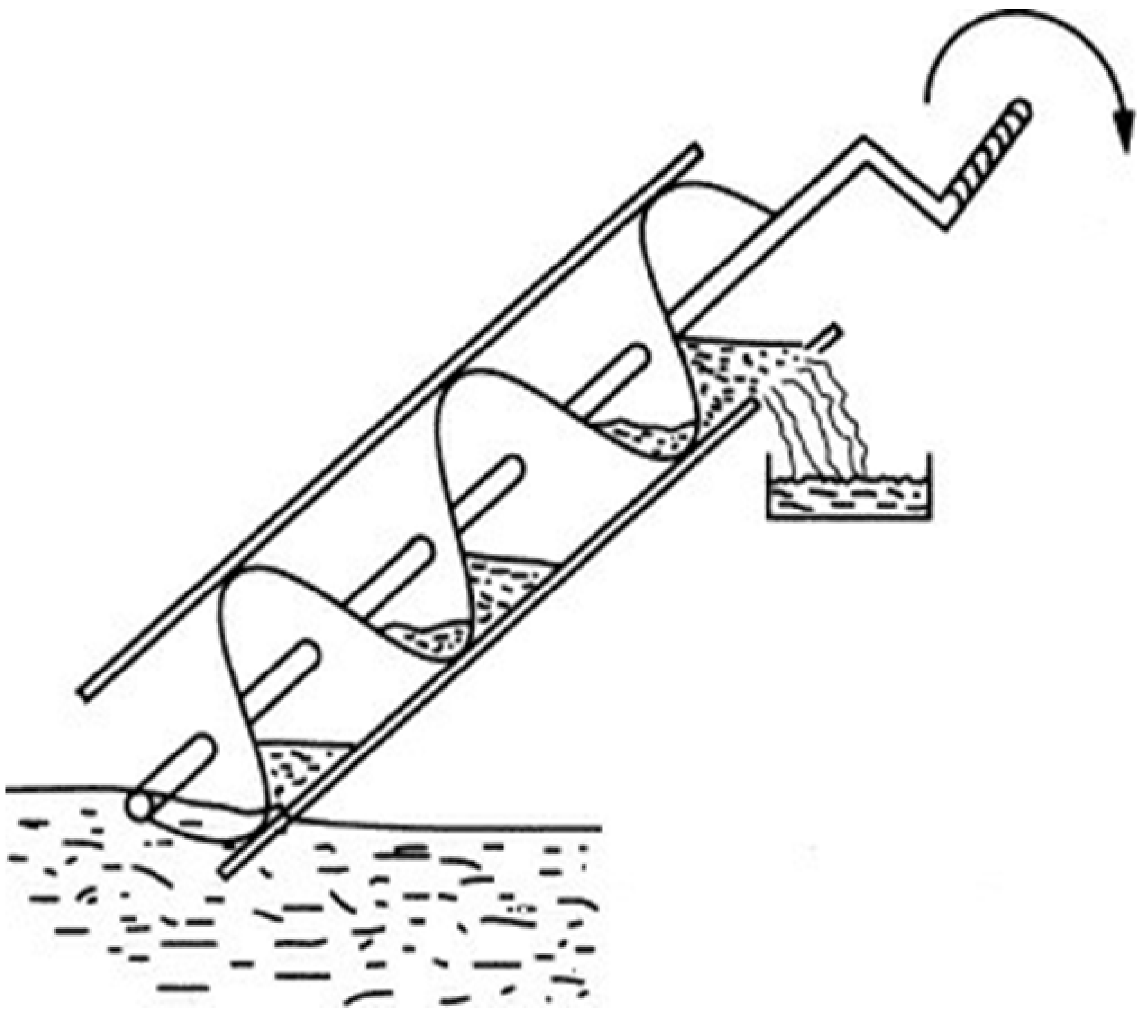
Outras fontes falam do retorno de Arquimedes ao Egito para uma segunda visita, quando trabalhou nas obras de irrigação em larga escala destinadas a controlar as enchentes do Delta do Nilo. Sabe-se que essas obras foram feitas durante esse período.

Independentemente de esses relatos serem ou não verdadeiros, Arquimedes certamente inventou um engenhoso parafuso que foi usado como bomba d’água. (O Parafuso de Arquimedes permanece em uso no Delta do Nilo até hoje, e o mesmo princípio é usado para carregar grãos e areia a granel nos veículos de transporte.)

Em sua forma mais simples, o parafuso consiste em um pólo central com uma rosca em espiral em torno dele.



Quando inserido em um cilindro e girado, a água é levada para cima e expelida, conforme mostra o artefato ligeiramente mais sofisticado apresentado a seguir.



A fama precoce de Arquimedes deveu-se a suas invenções e habilidades práticas em engenharia. No entanto, nenhuma de suas obras escritas — das quais dez tratados chegaram até nós — faz menção a esses engenhos práticos. Segundo Plutarco, "ele não se dignou a deixar qualquer obra escrita sobre esses assuntos; considerava sórdida e ignóbil a construção de instrumentos e, em geral, qualquer arte que se dirigisse ao uso e ao lucro, esforçando-se apenas em obter aquilo que, em sua beleza e excelência, permanecesse fora de qualquer contato com as necessidades comuns da vida".

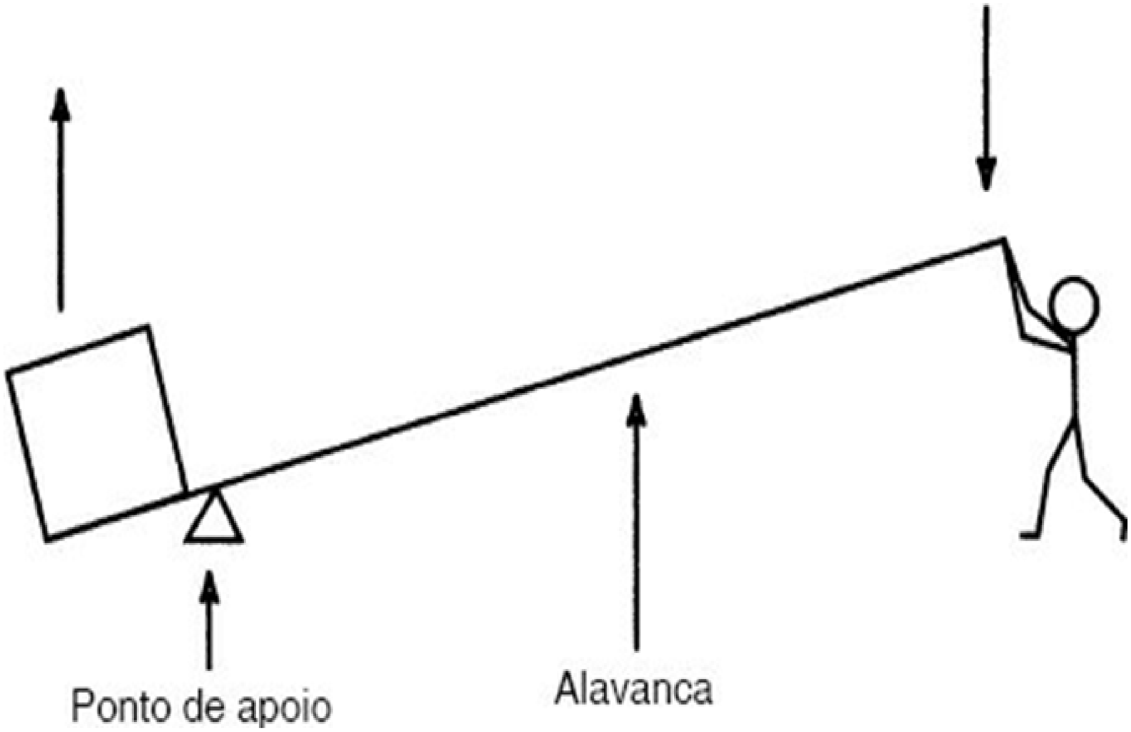
Esse esnobismo intelectual vinha de Platão, cuja filosofia asseverava que o único mundo real era o das abstrações infinitas (ou ideias eternas, como ele as chamava). O mundo particular em torno de nós era mera ilusão: atitude impensável para um cientista, e Arquimedes de maneira geral ignorou sua irrealidade. Apesar disso, no entanto, elementos dela contagiaram sua obra: era esse o *espírito* que prevalecia entre os homens eruditos da época. Arquimedes sem dúvida considerou o trabalho teórico seu trabalho *verdadeiro,* relegando o lado prático a mero acessório. No entanto, se chegou ao ponto de considerar a ciência prática “sórdida e ignóbil”, é outro assunto. Conforme veremos, ele era bem consciente das “necessidades comuns da vida” no mundo em guerra do século III a.C., no Mediterrâneo. (A atitude esnobe atribuída a Arquimedes pelos pares de Platão e Plutarco é outra tradição persistente que continuou a dificultar o progresso humano desde os gregos antigos.)

De volta a Siracusa, Arquimedes dedicou-se à matemática pura, consumindo longas e árduas horas no trabalho teórico que o consagraria como o mais apurado talento matemático dos dois mil anos que se seguiram. Qualquer indivíduo que consuma a maior parte de seu tempo numa atividade mental obsessiva é alvo das costumeiras anedotas pouco sutis, e Arquimedes não foi exceção. Segundo Plutarco, “ele estava tão enfeitiçado pelo pensamento que sempre se esquecia de comer e não ligava para sua aparência. Quando as coisas se tornavam demasiado desagradáveis, seus amigos insistiam energicamente para que tomasse um banho e se asseguravam de que se untasse com óleos perfumados. Mesmo nessas ocasiões, no entanto, ele parecia perdido no mundo, desenhando figuras geométricas”.

Esse é precisamente o tipo de clichê que se poderia esperar. Mas vale a pena lembrar que no século II a.C. os cientistas eram tão raros quanto os eclipses solares que previam. Essas características, acompanhadas, por outro lado, de um comportamento racional, eram um fenômeno novo. O estereótipo do cientista anda não tivera tempo para se desenvolver, o que significa que essas objeções a respeito da higiene pessoal e da forma de se vestir de Arquimedes podem muito bem conter um elemento de verdade. Ele próprio parece ter desempenhado papel fundamental na criação desse tipo — estabelecendo para os cientistas uma tendência que aparentemente terá longa duração durante o terceiro milênio.

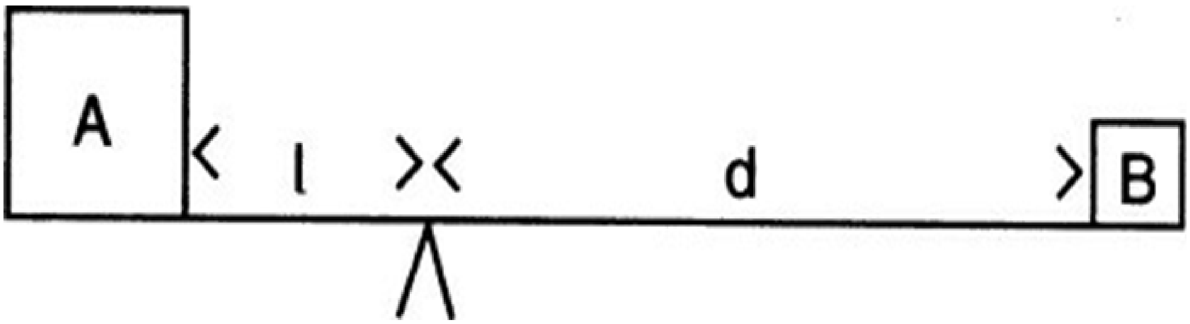
É provável que Arquimedes tivesse continuado a ser feliz nesse estilo metafísico malcheiroso, mas o rei Hierão evidentemente julgou que esse comportamento era um mau exemplo para seus súditos siracusanos. Segundo Plutarco, Hierão “enfaticamente solicitou-lhe e o persuadiu (Arquimedes) a se ocupar de modo tangível das demandas da realidade”. Mais especificamente, despachou-o para os estaleiros, a fim de tentar administrar o caos estabelecido pelos armadores do reino. Eles haviam acabado de concluir a construção de uma grande nau, luxuosamente equipada, denominada *Siracusia,* com que Hierão desejava presentear o rei Ptolomeu do Egito. Conforme relatos contemporâneos, a nau devia pesar bem acima de 4.000 toneladas (igual a um moderno contratorpedeiro com 300 tripulantes). Era tão pesado que os construtores se viram incapazes de lançá-la à água.

Entra em ação o super-homem Arquimedes. Com que precisão ele conseguiu mover aquele mamute encalhado permanece obscuro — mas presumivelmente utilizou um sistema de roldanas, pois relata-se que Arquimedes deslocou o *Siracusia* sem qualquer ajuda. Foi nessa ocasião que proferiu sua célebre bravata: “Dêem-me um ponto de apoio e uma alavanca e moverei a Terra.”



A famosa observação de Arquimedes revela o conhecimento que tinha do ponto de apoio, literalmente um suporte, ou escora, colocado de forma a habilitar uma quantidade comparativamente pequena de pressão a erguer um peso comparativamente grande. O ponto de apoio pode ser usado tanto para escorar uma alavanca ou, como no caso do *Siracusia,* um sistema de roldanas. Uma das melhores obras de Arquimedes, *Sobre o equilíbrio dos planos,* é dedicada às alavancas e mostra como determinar o centro de gravidade de várias figuras planas (ou seja, bidimensionais). Como em todos os seus trabalhos, Arquimedes aderiu ao formato estabelecido por Euclides. Postulados (ou definições) são seguidos por proposições (ou teoremas) que são então provados, cada prova seguindo-se a uma prova anterior.

De início, Arquimedes estabeleceu o princípio central das alavancas, que determina que “duas magnitudes se equilibram a distâncias reciprocamente proporcionais às suas magnitudes”.



Para que os dois pesos A e B se equilibrem na figura acima:

A está para B assim como d está para 1

A:B = d:1 ou ${}^{A}/_{B} = {}^{d}/_{1}$

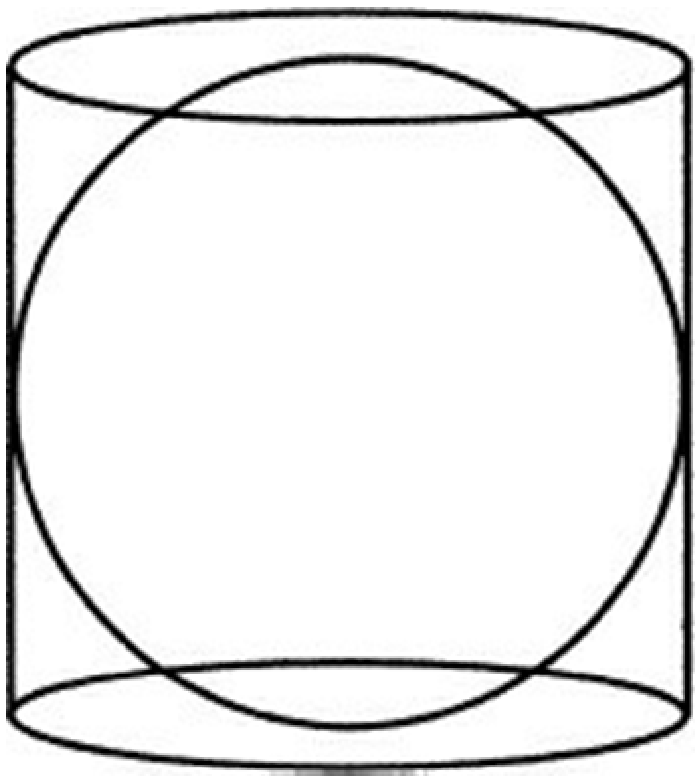
Arquimedes introduziu a noção que agora conhecemos como “centro de gravidade” e mostrou como calculá-la.

Bem pode ser que matemáticos anteriores a tivessem conhecido, mas Arquimedes provavelmente formalizou a base teórica para seu cálculo e certamente ampliou sua aplicação. Mais adiante, nesse trabalho, estabeleceu como descobrir o centro de gravidade para paralelogramos, triângulos e segmentos parabólicos. Tudo isso, ou pelo menos a maior parte, é trabalho original. *Sobre o equilíbrio dos planos* lançou os alicerces da física teórica.

Arquimedes, no entanto, achava que suas contribuições mais importantes se deram em geometria sólida. Seu tratado *Sobre a esfera e o cilindro* demonstrou que a superfície de uma esfera é quatro vezes a de seu maior círculo. Em outras palavras:

$$S = 4\ 7\pi r2$$

Provou também que o volume de uma esfera é igual a 2/3 do cilindro que a contém.



Em conseqüência disso, conseguiu demonstrar que a fórmula para o volume da esfera é:

$$V = 4/3\ \pi r3$$

Arquimedes considerava que a descoberta da relação entre uma esfera e o cilindro que a contém era sua conquista mais importante — tanto assim que pediu que o diagrama de uma esfera inscrito em um cilindro fosse gravado em seu túmulo.

Fez também outra descoberta teórica sobre uma esfera inscrita dessa forma num cilindro — a saber, que a área da superfície da esfera é igual à superfície curva do cilindro que a encerra.

Seu trabalho prático com objetos esféricos era igualmente admirável. Atribui-se a ele a construção de dois planetários esféricos tão admirados que foram saqueados e levados para Roma após a queda de Siracusa. O primeiro deles, quase com certeza um hemisfério cuja superfície interna continha um mapa dos céus, pode ter sido belo a seu modo, mas o segundo era sem dúvida uma obra-prima de engenhosidade mecânica. Consistia em um planetário aberto com peças que se moviam e que espelhavam com precisão o plano do universo tal como concebido por Eudoxo de Cnido, um amigo de Platão que vivera na comunidade matemática de Atenas no século anterior.

Segundo Eudoxo, o universo consistia em uma quantidade de esferas concêntricas transparentes, cada uma delas servindo de apoio a um planeta. À medida que as esferas se movimentavam, giravam os planetas ao longo de sua trajetória. (Adaptando uma antiga idéia pitagórica, Eudoxo declarou que o movimento dessas esferas umas em direção às outras produzia uma divina "música das esferas", tão linda que não podia ser ouvida pelos ouvidos humanos.) A concepção do universo de Eudoxo, com a Terra no centro e os planetas girando em torno dela, teria profunda influência sobre Aristóteles. E, uma vez que o grande Aristóteles estabeleceu como lei que a Terra era o centro do universo, o próprio Arquimedes sentiu-se inclinado a aceitar essa concepção. Consta que seu intricado planetário explorou os movimentos do Sol, da Lua e dos planetas em torno da Terra, em relação à esfera das estrelas fixas, durante o curso de um dia. Podia também ser regulado para ilustrar as sucessivas fases da Lua e os eclipses lunares. Na opinião dos sábios, era provavelmente acionado por algum tipo de mecanismo semelhante a um relógio d'água.

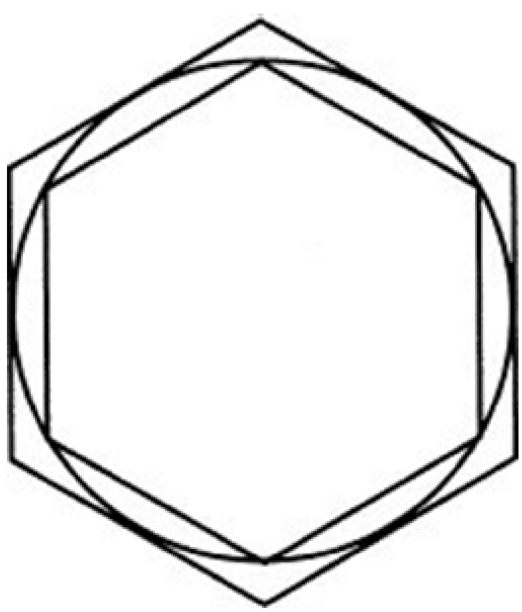
Em Roma, o planetário de Arquimedes, com suas peças em movimento, despertou imensa admiração pelos séculos que se seguiram. Tanto Ovídio quanto Cícero se referem a ele. No século IV d.C., o erudito latino Lactâncio, tutor do filho de Constantino, o Grande, chegou a apresentar o feito extraordinário de Arquimedes como uma das primeiras provas cristãs da existência de Deus. Segundo Lactâncio, se a inteligência de um ser humano era capaz de produzir algo tão maravilhoso, devia haver uma inteligência ainda maior que fosse capaz de produzir o objeto que a inteligência humana procurava imitar. (Nessa época, a circularidade não se limitava apenas às órbitas dos corpos celestes em torno da Terra.)

É quase certo que o planetário de Arquimedes tenha se perdido durante o saque de Roma pelos visigodos em 410 d.C., mas a idéia incorreta na qual se baseou iria perdurar por outros mil anos. A noção aristotélica de um sistema solar com o centro ocupado pela Terra foi mantida como artigo de fé pela Igreja católica por toda a Idade Média.

No que dizia respeito ao planetário, o próprio Arquimedes parece ter-se deixado impressionar por sua magia técnica. Rompendo hábitos de uma vida inteira, escreveu um tratado *Sobre a constituição das esferas.* Há várias referências esparsas a ele nas fontes clássicas, mas jamais saberemos ao certo a verdadeira natureza da obra-prima de Arquimedes, já que o tratado se perdeu.

Uma das obras-primas que subsistiram foi o pequeno texto *Medida do círculo,* que contém uma das melhores peças de argumentação geométrica. Ela indica a relação da circunferência de um círculo com o seu diâmetro, o que lhe permitiu produzir uma extraordinariamente exata aproximação de [pi]. O método por ele utilizado apontou o caminho para uma das grandes descobertas da matemática.

Arquimedes calculou a área de um círculo descobrindo os limites entre os quais essa área se estende e depois estreitando pouco a pouco esses limites até mais ou menos a área real. Para isso, inscreveu dentro do círculo um polígono regular e depois circunscreveu o círculo com um polígono similar.



Arquimedes começou com dois hexágonos e, mediante a duplicação dos lados e a repetição do processo, chegou finalmente a polígonos de 96 lados. Calculou a área do polígono interno, que estabelecia o limite inferior da área do círculo. Em seguida, calculou a área do polígono externo, que fixava o limite superior. Por esse método foi capaz de calcular que:

$$3\ 10/71 < \pi < 3\ 1/7$$

Em decimais, teríamos a seguinte equação:

$$3{,}14084 < \pi < 3{,}142858$$

A exatidão desses cálculos pode ser verificada na medida em que, chegando a sete dígitos, sabemos agora que:

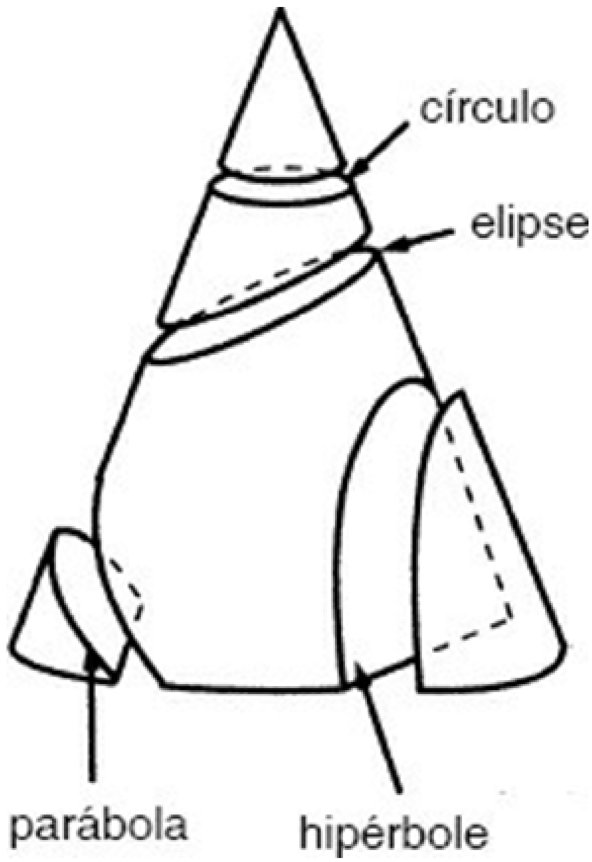
$$\pi = 3{,}1415927$$

A maior inovação de Arquimedes nesse ponto foi o uso da *aproximação* no lugar da *igualdade precisa.* Euclides havia proposto isso como método, mas não o aplicou ou verificou seriamente suas possibilidades. Arquimedes viu que com freqüência bastava fazer duas aproximações comparativamente fáceis de uma resposta que propusesse um limite inferior e um outro superior

— entre os quais residiria a resposta. Quanto maior a exatidão exigida, mais estreitos os limites. Por exemplo, no diagrama anterior, os lados de um polígono podiam ser aumentados até um limite superior de infinitude, reduzindo assim a diferença entre os limites superior e inferior até um resultado infinitesimalmente pequeno. Assim começou o cálculo, embora outros 2.000 anos ainda fossem necessários antes que alguém desenvolvesse essa idéia. Não antes de 1666, quando Newton formulou os elementos essenciais do cálculo diferencial e integral.

No entanto, alguns são de opinião que Arquimedes de fato usou o cálculo integral em seu tratado *Sobre os conóides e os esferóides.* Esse tratado expande a geometria para além dos rígidos parâmetros a ela impostos por Platão e sua atitude mística em relação às formas — as matemáticas e as de outra natureza. (Platão acreditava que essas formas — ou idéias — eram a realidade última, a partir da qual o mundo era constituído: uma constatação que se podia reconhecer na crença de Pitágoras de que “tudo é número”.) Platão acreditava em Deus e na geometria. Segundo sua famosa máxima, “Deus sempre geometriza”. Foi assim que Deus fez o mundo. Por isso, a verdadeira geometria estava limitada às formas ideais, figuras puras e infinitas como as que podiam ser traçadas usando-se apenas um compasso e uma régua. (Embora a razão pela qual o cenário da geometria de Deus devesse ser limitado a um compasso e uma régua permaneça obscura.) Figuras que não podiam ser construídas somente com a utilização de um compasso e uma régua eram desdenhosamente referidas como “mecânicas”, deixando implícito que podiam ser formadas por movimento mecânico, não sendo, portanto, nem infinitas nem perfeitas. Elas pertenciam apenas ao campo da aplicação matemática prática. Arquimedes preferiu ignorar essa distinção arbitrária, mas estava virtualmente sozinho nessa posição. A geometria permaneceria mutilada pela superstição mística de Platão por dois milênios, até que o filósofo e matemático francês Descartes rompesse a forma no século XVII. Na realidade, resíduos dessa distinção subsistem até hoje em nossas noções de matemática “pura” e “aplicada”.

E m *Sobre os conóides e os esferóides,* Arquimedes tratou das quatro seções cônicas — círculo, elipse, parábola e hipérbole.



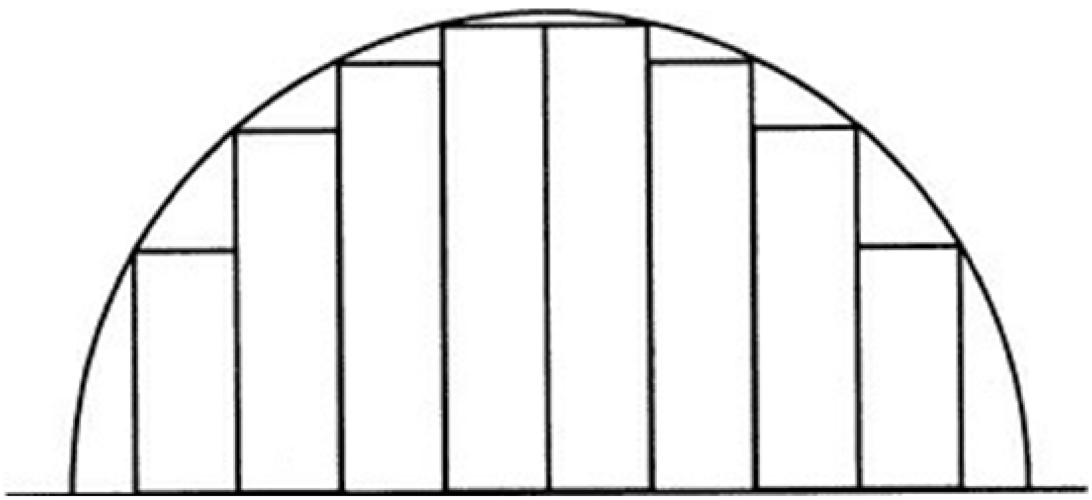
Das seções cônicas, apenas o círculo é uma figura geométrica clássica no sentido platônico.

Quando esses segmentos giram em torno de seu eixo, formam sólidos. Por exemplo, um círculo bidimensional girando em torno de seu eixo (seu diâmetro) irá gerar uma esfera tridimensional. Uma elipse delineará uma forma de esfera achatada conhecida como elipsóide e assim por diante.

Arquimedes mostrou como calcular o volume dessas formas tridimensionais.

Isso significava, em essência, calcular a área abaixo da curva de que se tratava e em seguida fazê-la girar em torno de seu eixo para encontrar o volume. (Assim como encontrar a área de um semicírculo, de onde procedemos para calcular o volume da esfera formada pela revolução de

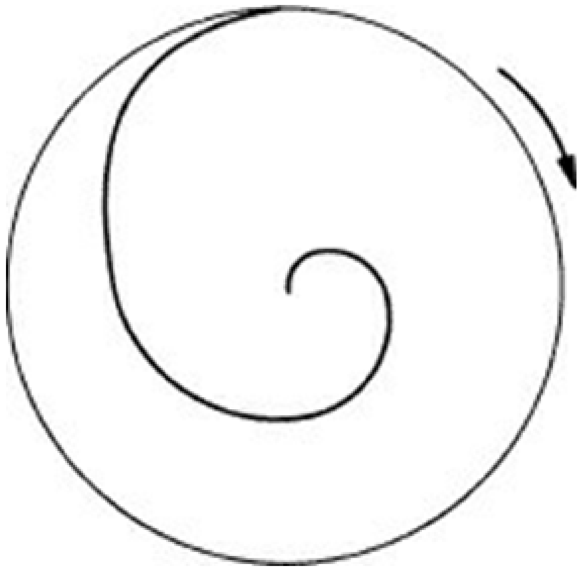
360° do semicírculo.) O método usado por Arquimedes para calcular a área abaixo da curva trazia em si muito da idéia empregada no cálculo da área de um círculo usando-se polígonos inscritos e circunscritos. Podemos servir-nos disso para calcular a área abaixo da curva semicircular do seguinte modo:



Se dividirmos o semicírculo em faixas paralelas de igual largura, e cortarmos as extremidades de modo que cada faixa se torne retangular, podemos facilmente calcular a área ocupada por todas as seções. Quanto mais estreitas as faixas se tornam, menor é a área das extremidades descartadas. À medida que o número de faixas se aproxima do infinito, também a área descartada se torna infinitesimalmente pequena e a área total das faixas se aproxima da área do semicírculo, que é seu limite superior. De forma simplificada, isso é cálculo integral.

Em outro tratado, intitulado *Sobre as espirais,* Arquimedes usou um método muito semelhante ao cálculo diferencial.

Esse tratado enfocava outra forma geométrica não platônica, ou seja, a tão conhecida espiral de Arquimedes.



Que continua para se tornar:

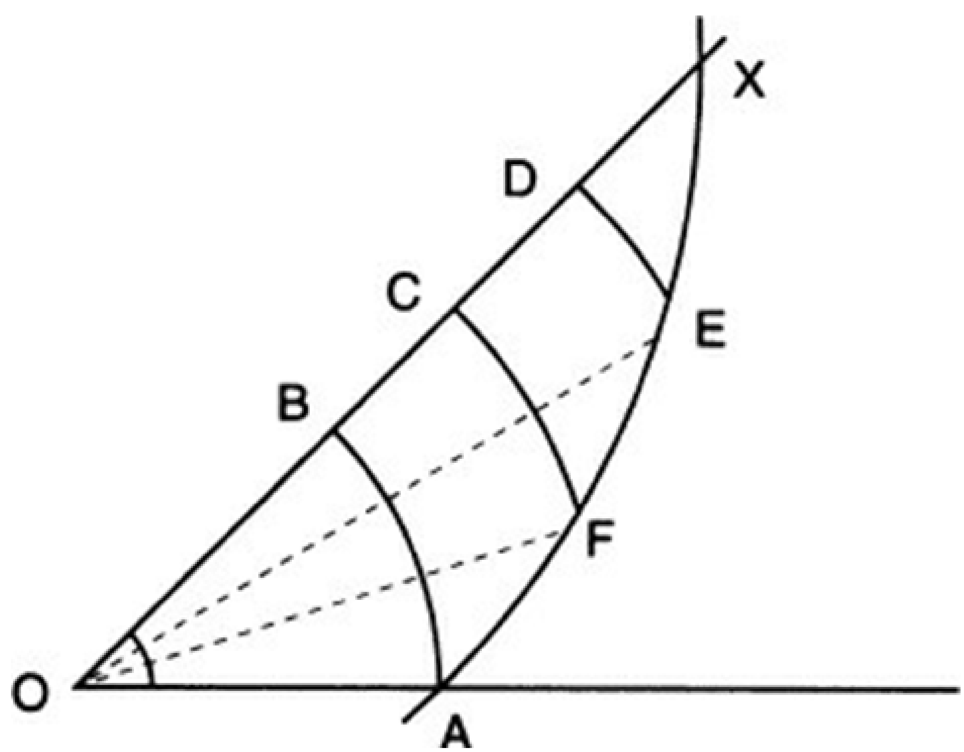
Arquimedes definiu essa espiral de forma precisa, mas de difícil compreensão, conforme se segue.

“Se uma linha reta desenhada em um plano gira uniformemente em torno de uma extremidade que permanece fixa e retorna à posição da qual partiu e se, ao mesmo tempo, à medida que a linha gira, um ponto se move uniformemente ao longo da linha reta, começando da extremidade que permanece fixa, o ponto descreverá uma espiral no plano.” Basicamente, esse é o caminho percorrido por uma formiga diretamente do centro para a borda de um disco em rotação, visto de cima por um observador que espera pacientemente para colocar um novo disco.

Resolveu também o problema de como encontrar a tangente em qualquer ponto na espiral. O cálculo diferencial soluciona o problema de como encontrar a tangente em qualquer ponto em qualquer curva. Daí se pode deduzir que Arquimedes esteve a um passo da descoberta do cálculo diferencial. No entanto, os cálculos que tratavam de sua espiral de fato tiveram êxito na solução de dois dos três problemas clássicos da geometria, que por tanto tempo haviam preocupado os matemáticos em todo o mundo antigo. Eram eles:

1. Como trissecar um ângulo.
2. Como desenhar um cubo que tenha o dobro do volume de um cubo determinado.
3. Como construir um quadrado igual a um círculo.

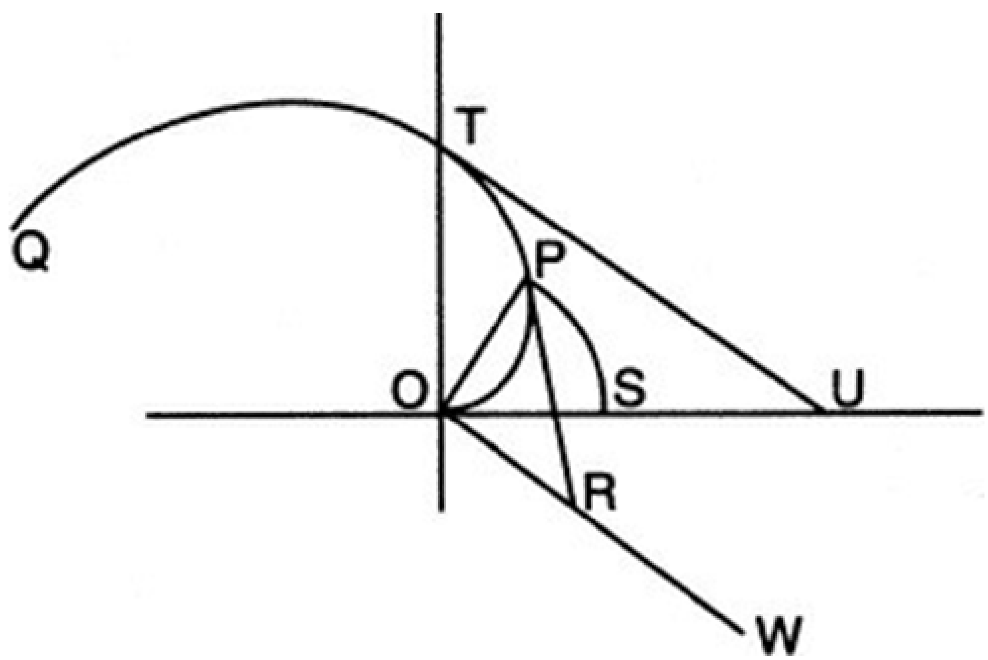
Arquimedes mostrou como trissecar um ângulo mediante engenhosa utilização de sua espiral.



A fim de trissecar o ângulo XOA, trace transversalmente a ele um segmento de uma espiral de Arquimedes XEFA. (Abra um compasso de modo uniforme ao longo de uma régua giratória.) Desenhe um arco de A a B com centro em O. Trisseque BX em BC, CD e DX. Desenhe arcos com centro em O de C a F e de D a E. OE e OF trissecam o ângulo XOA. (Pode-se ver daí que é possível usar a espiral de Arquimedes para dividir um ângulo em qualquer número de partes iguais.)

Arquimedes também formulou a solução do terceiro dos célebres problemas da Antigüidade — a saber, como construir um quadrado igual a um círculo, ou seja, um quadrado cujos lados somam o mesmo comprimento que a circunferência do círculo. Esse é o famoso problema conhecido como da “quadratura do círculo”.

Para fazer isso, também usou sua espiral.



Em linguagem simples, ele procedeu do seguinte modo:

P é qualquer ponto na espiral. A linha OW forma um ângulo reto com OP. A tangente em P intercepta OW em R. O raio do arco PS é OP e intercepta a linha que parte de O.

Arquimedes demonstrou que OR tem o mesmo comprimento que o arco PS.

Segue daí que OU tinha o mesmo comprimento de um quarto da circunferência de um círculo com raio OT.

Desenhe esse círculo e ele estará quadrado por um quadrado desenhado sobre a base OU. Embora Arquimedes tenha resolvido esse problema, a questão de como "quadrar o círculo" continuou impondo derrotas a todos até bem depois da Idade Média. Na realidade, permanece sem solução até hoje. Mas como é possível — se Arquimedes encontrou a resposta?

Segundo as regras de Platão, ou seja, segundo a geometria clássica, Arquimedes estava trapaceando — porque sua espiral é uma "figura mecânica". Ela não pode ser desenhada usando- se apenas compasso e régua.

Ninguém foi capaz até agora de resolver qualquer dos três célebres "problemas da Antigüidade" usando a geometria clássica (ou seja, apenas compasso e régua). E jamais isso será possível. Em 1882 foi finalmente provado que nenhum desses problemas podia ser resolvido apenas com compasso e régua.

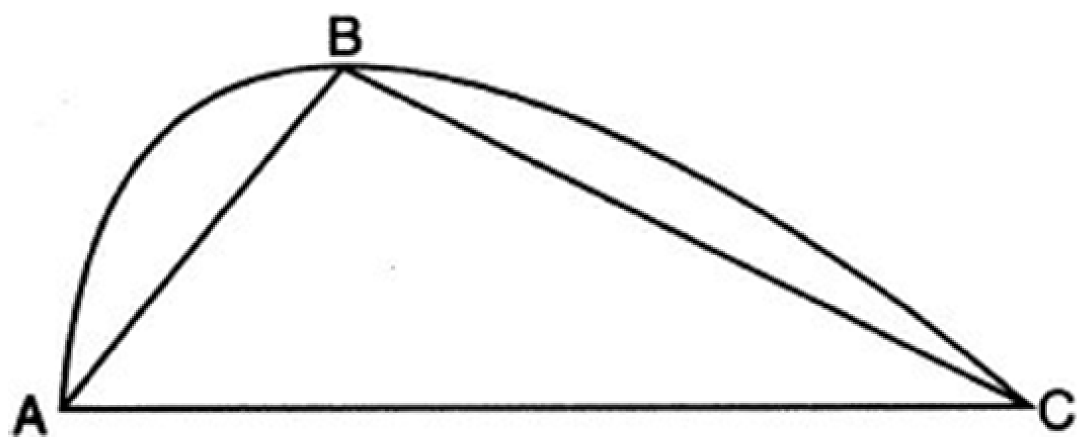
Outra obra de Arquimedes, *Quadratura da parábola,* reporta-se aos tratados anteriores. Assim como todos os demais tratados, inicia-se com uma carta. Essas cartas eram usualmente dirigidas a seus amigos de Alexandria. Pode-se deduzir do que ele diz que estava ciente da importância de sua obra e que não tinha qualquer desejo de mantê-la em segredo. Ansiava que ela ocupasse o lugar que lhe cabia na crescente massa de conhecimento científico que se acumulava na Biblioteca de Alexandria, para que pudesse circular entre aqueles que lá estudavam. Vivendo a 1.600 quilômetros, do outro lado do mar, na Sicília, Arquimedes parece ter permanecido algo isolado desse centro de conhecimento. Pelo menos é o que sugere a carta que abre a *Quadratura da parábola,* que começa assim:

Arquimedes para Dositeu,
saudações.

Lamentei quando tomei conhecimento de que Conão, que foi meu amigo enquanto viveu, estava morto. Ele não era apenas um amigo, mas também um admirável matemático. Soube que mantinha relações com ele e que também é versado em geometria. Por essa razão envio-lhe a notícia que tencionava mandar a Conão e que se refere a certo teorema geométrico que não tinha sido pesquisado antes, mas que agora o foi por mim. Descobri esse teorema inicialmente por meio da mecânica e depois o demonstrei por meio da geometria."

Aqui vemos de novo o conflito entre as geometrias clássica e mecânica. Arquimedes invariavelmente sentia necessidade de demonstrar seus teoremas pelo rigoroso método clássico. Embora sugestivamente tenha sido o método mecânico que, de início, lhe permitiu descobri-lo.

Prossegue descrevendo o problema: "quadrar o segmento limitado por uma linha reta e uma seção de um cone em ângulo reto (em outras palavras, uma parábola)". Em seguida, anuncia sua descoberta de "que todo segmento limitado por uma linha reta e uma seção de um cone em ângulo reto (uma parábola) equivale a quatro terços do triângulo que tem a mesma base e altura igual à do segmento".



Em outras palavras: triângulo ABC x 4/3 = segmento parabólico ABC.

O método mecânico que Arquimedes utilizou para essa descoberta pressupunha encontrar a área abaixo da curva — de novo um problema que implicava o método do cálculo integral.

As "exigências da realidade", no entanto, continuariam a interromper Arquimedes em seu geométrico mundo de sonhos. Uma vez mais o rei solicitou seus serviços. Esse episódio tão famoso quanto improvável possui várias fontes, indicando que poderia ter se baseado em alguma verdade similar. O informe mais confiável é provavelmente o do arquiteto romano Vitrúvio, ainda que estivesse escrevendo dois séculos após os acontecimentos. Segundo Vitrúvio, o rei Hierão decidiu oferecer uma coroa de flores de ouro aos deuses para comemorar sua permanente boa sorte. Entregou a tarefa a um artista siracusano local, mas, quando este voltou com a coroa terminada, Hierão desconfiou e em seguida teve certeza de que ele adulterara o ouro com prata mais barata e embolsara o lucro. Mandou pesar a coroa, mas ela tinha o mesmo peso do ouro entregue ao artista. Convocou Arquimedes, mas até ele mesmo mostrou-se atônito de início e retirou-se prometendo pensar sobre o assunto.

Certa manhã, vários dias depois, Arquimedes ainda matutava sobre o problema quando entrou em uma banheira (acontecimento raro, a julgar pelos relatos de outros contemporâneos). À medida que imergia mais fundo na banheira, percebeu que mais e mais água transbordava. Num lampejo entendeu como resolver o problema da coroa de Hierão.

Segundo a lenda, Arquimedes ficou tão excitado com sua descoberta que pulou da banheira e correu para casa a fim de registrá-la. E podia-se ouvi-lo gritando, correndo nu pelas ruas: “Eureca! Eureca!” (Achei!)

Verdadeira ou não, essa estória permanecerá para sempre ligada a Arquimedes. (Como todos sabemos, a história não é o que de fato aconteceu, mas aquilo que nos agrada pensar que aconteceu.) Até hoje, cientistas — e mortais inferiores — referem-se com frequência ao “Momento Eureca” quando de súbito encontram a solução de um problema. Mas o que exatamente Arquimedes entendeu?

De acordo com Vitrúvio, Arquimedes pediu a Hierão uma porção de ouro que pesasse o mesmo que a coroa. Imergiu-a em seguida em um recipiente cheio de água até a borda e mediu o excesso. Então imergiu a coroa em uma banheira, e mediu o excesso de água resultante, que era maior que o ouro em volume, provando assim que o ouro da coroa tinha sido adulterado. Arquimedes compreendera que os sólidos de densidade diferente deslocam diferentes quantidades de água — pois quando têm o mesmo peso devem ocupar porções diferentes de espaço.

O episódio de Arquimedes pulando da banheira é tradicionalmente associado à descoberta do princípio da hidrostática. Isso aparece no tratado *Sobre os corpos flutuantes,* reconhecido como a obra fundadora da hidrostática. Em linguagem simples, o princípio de Arquimedes atesta que um corpo flutuante é capaz de deslocar uma quantidade de fluido equivalente a seu peso. Isso pode parecer óbvio, mas não o era para os antigos. Até que Arquimedes formulasse esse princípio, ninguém sabia com precisão o que significava flutuar. Não havia como *saber* se algo flutuaria ou não. Estavam os armadores, no entanto, certos de que as naus flutuariam sem precisar que os matemáticos lhes dissessem? Certamente que sim.

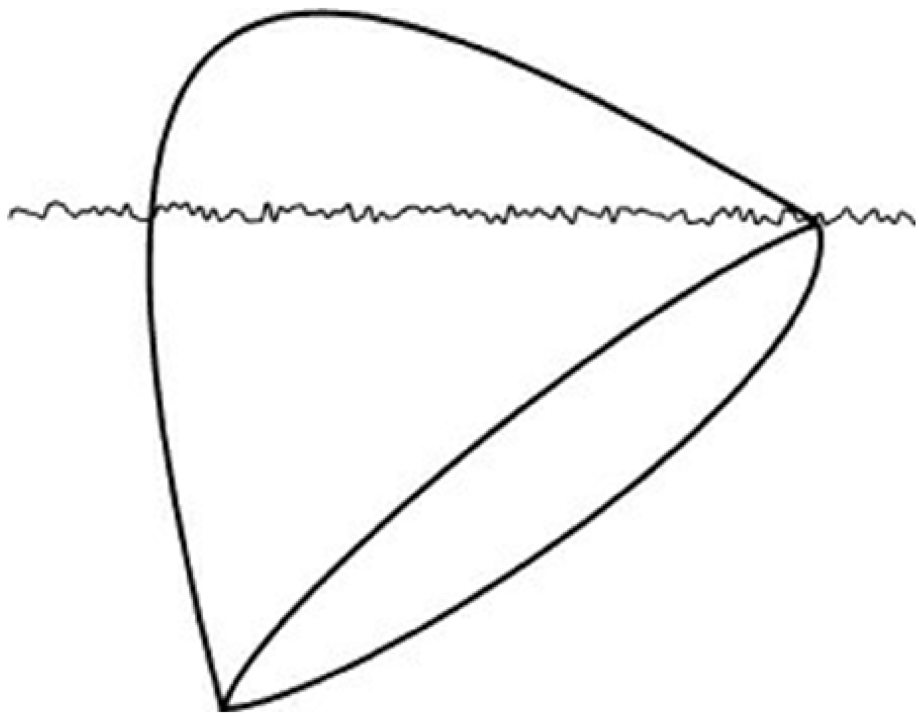
Mas as naus tornavam-se maiores e muito mais sofisticadas. Como já vimos, a *Siracusia* do rei Hierão era similar em tonelagem a um moderno contratorpedeiro, assim como o era a trirreme dos gregos antigos — assim denominada por ter nada menos que três carreiras de remos (cada uma delas sustentada por uma fileira de suarentos escravos). Na época de Arquimedes não havia nada parecido com as qüinqüerremes, com cinco carreiras de remos. Os eruditos consideram muito improvável que nesse caso os bancos dos remadores fossem empilhados uns sobre os outros. No entanto, pode-se apostar que assim acontecia no primeiro barco lançado — que inevitavelmente foi a pique (juntamente com a cabeça do arquiteto naval responsável). Antes de Arquimedes descobrir o princípio da hidrostática, um armador não tinha como *saber* se seu barco flutuaria ou deslocaria água suficiente de modo a permanecer flutuando.

Isso não foi tudo, porém, que Arquimedes estabeleceu no novo campo da hidrostática, que ele criava em pleno isolamento em seu tratado *Sobre os corpos flutuantes.* Talvez mais interessante para o leitor moderno seja sua afirmação: “A superfície de qualquer fluido em repouso é igual à superfície de uma esfera cujo centro é o mesmo que o da Terra.” Em outras palavras, nem a superfície do mar, nem a superfície da água em uma banheira é plana. Ela se curva, alinhando-se como um segmento de um círculo em torno do centro da Terra. E isso ele apoiou em evidências matemáticas.

Os antigos eram bem conscientes de que a Terra era um globo — as superstições que rezavam que navegar muito longe significava cair da borda do mundo eram vistas como estórias de velhos marinheiros. A persistência dessas superstições através da Idade Média devia-se simplesmente ao pensamento confuso e à introdução de conceitos religiosos e quase-aristotélicos no campo científico. Como podemos ver, tanto Arquimedes quanto seu amigo Eratóstenes já concebiam a Terra como um globo em provas matemáticas do século III a.C.

As leis da hidrostática, conforme estabelecidas por Arquimedes, permaneceriam incontestaveis (ou ignoradas) por 1.800 anos — até que foram aprimoradas pelo matemático e pensador religioso francês Blaise Pascal. Nenhum outro campo científico foi iniciado e de súbito interrompido em sua trajetória por quase dois mil anos.

No segundo livro de *Sobre os corpos flutuantes,* Arquimedes criou uma das mais refinadas obras de raciocínio matemático puro produzida em qualquer época, focalizando os parabolóides de revolução (formados quando uma parábola é girada em torno de seu eixo). Ele demonstrou as posições nas quais esses parabolóides flutuavam em líquidos de densidades diferentes. Um exemplo da sutileza de suas proposições propicia-nos não mais que um prenúncio da sutileza de seu procedimento matemático: "Dado determinado segmento de um parabolóide de revolução mais leve que um fluido … se o segmento for colocado no fluido de tal forma que sua base seja inteiramente submersa, jamais repousará numa posição tal que a base toque a superfície do fluido em um ponto apenas." Em outras palavras, ele jamais flutuaria como no diagrama que se segue (e ele conseguiu provar isso).



Sobre os corpos flutuantes foi obra de um dos maiores matemáticos de todos os tempos no auge de sua força e dirigido à confraria dos matemáticos de todos os tempos. Os prodígios se iniciam nessas obras, outros não têm a mesma sorte. Mais ameno para o leigo é o tratado mais popular de Arquimedes, *O contador de areia,* dedicado ao rei Gelão de Siracusa, que sucedeu ao rei Hierão II, seu pai, em 216 a.C. É bastante provável que Arquimedes tenha em algum momento sido tutor de Gelão. Ele parece ter tido bastante consciência da capacidade intelectual de Gelão — a qual se afigurava invulgarmente razoável para o filho de um tirano. *O contador de areia* pode visar o leigo, mas de nenhum modo "deprecia" o leitor. Ao contrário, é uma das mais imaginativas e inspiradoras obras curtas jamais escritas sobre números (reconhecidamente um campo não muito explorado bibliograficamente).

O contador de areia consegue ser poético e, ao mesmo tempo, manter o rigor matemático desde sua carta de abertura, da qual vale a pena transcrever um trecho algo substancial:

> “Existem alguns, rei Gelão, que pensam que o número de grãos da areia é infinito em multiplicidade; e, quando falo de areia, não me refiro apenas à que existe em torno de Siracusa e no resto da Sicília, mas também à encontrada em todas as regiões, habitadas ou não habitadas. Há outros ainda que, sem considerá-los infinitos, ainda assim pensam que nenhum número foi instituído que seja grande o suficiente para exceder sua multiplicidade. E está claro que aqueles que sustentam esse ponto de vista, se imaginassem uma massa feita de areia em outros aspectos tão grande quanto a massa da Terra, incluindo nela todos os mares e todas as crateras da Terra cheias até uma altura igual à das mais altas montanhas, estariam muitas vezes ainda mais longe de reconhecer que qualquer número poderia ser expressado excedendo a multiplicidade da areia assim considerada. Mas vou tentar mostrar-lhe, por meio de provas geométricas que será capaz de acompanhar, que dos números criados por mim, e mencionados no trabalho que enviei a Zeuxipo, alguns excedem não apenas o número da massa de areia igual em magnitude à Terra cheia da forma descrita, mas também o de uma massa igual em magnitude ao universo.”

Em *O contador de areia,* Arquimedes propôs-se vencer as limitações do sistema numérico grego, que era, tanto quanto podemos afirmar, em essência, um sistema decimal tomado emprestado aos egípcios. Não possuía qualquer conceito de zero e de um limite superior. O número mais alto era uma miríade, o equivalente em notação moderna a 10.000. (Os antigos gregos naturalmente não o expressariam desse modo, com zeros.) Arquimedes argumentou com bastante lógica que, se havia nomes tradicionais para os números até uma miríade, pela mesma razão era possível expressar números até uma miríade de miríades (100.000.000). Esses números foram por ele denominados números da *primeira ordem.* E prosseguia:

“Suponhamos que o número 100.000.000 seja a (primeira) unidade da *segunda ordem* e que a *segunda ordem* seja constituída pelos números a partir daquela unidade até (100.000.000)2.

Que seja esse número uma vez mais a (primeira) unidade da *terceira ordem* de números terminando em (100.000.000)3; e assim por diante até que alcancemos a centésima milionésima *ordem* de números terminando em (100.000.000)100.000.000, que chamaremos P."

E então continuou usando o mesmo processo até que alcançou o número P100.000.000, tão grande que não haveria espaço suficiente para escrevê-lo por extenso no universo.

Arquimedes marcava com isso um ponto revolucionário. Demonstrava que a matemática era maior que o universo. Conforme prometera em sua carta introdutória, procedeu à demonstração de que a matemática poderia numerar até os grãos de areia necessários para encher o universo e ainda dispor de números sobressalentes.

Ele foi provavelmente o primeiro a elaborar em detalhes a matemática dos grandes números. Formulou cálculos que mostravam que "o número de grãos de areia que poderia conter uma esfera do tamanho de nosso 'universo' (ou seja, aquilo que chamaríamos sistema solar) é menor que 1.000 unidades da *sétima ordem* de números". Em outras palavras: 1051.

E como chegamos *nós* a essa última cifra? Segundo Arquimedes, a *segunda ordem* de números vai de 100.000.000 a (100.000.000)2.

Dessa forma, a *sétima ordem* de números deve ser de (100.000.000)6 a (100.000.000)7. Mas o início da *sétima ordem:* (100.000.000)6 = 1048.

Assim, 1.000 (103) unidades de 1048 = 103 x 1048 = 103 + 48 = 1051 (demonstrando que é possível nós trabalharmos com números macromatemáticos desde que nos concentremos neles).

A fim de empreender esses cálculos, Arquimedes formulou várias hipóteses, que incluíam: "O perímetro da Terra é de aproximadamente 3.000.000 de estádios e nunca maior." (Um estádio equivalia a perto de 200 metros: cálculos atuais situam o equador a cerca de 64.000 estádios.) "O diâmetro da Terra é maior que o diâmetro da Lua e o diâmetro do Sol é maior que o diâmetro da Terra." (A maioria dos astrônomos antigos já havia então chegado a essa conclusão.) "O diâmetro do Sol é mais ou menos 30 vezes o diâmetro da Lua e nunca maior." (Projeções anteriores o estimavam em não mais que 20 vezes maior. É de fato perto de 400 vezes maior.) O mais notável não é tanto a exatidão relativa dessas cifras, mas que Arquimedes as estivesse de algum modo utilizando em cálculos. Na época, o mais avançado meio de transporte por terra era a carroça, o único instrumento de observação era o olho humano e os limites do mundo conhecido esgotavam-se nas fímbrias da Europa setentrional e nas fronteiras da Índia. Isso nos dá um indício do quanto o conhecimento teórico dos gregos tinha se estendido além da aplicação prática. Essa discrepância jamais ocorreu de novo em toda a história do conhecimento humano, à exceção do século atual.

Em *O contador de areia,* Arquimedes também delineou o sistema heliocêntrico do universo proposto alguns anos antes por Aristarco de Samos. Ele concluiu acertadamente que as idéias de Aristarco significavam que "o universo é muitas vezes maior do que se admitiu até aqui". Infelizmente, ele descartou essas conclusões. Talvez seja sugestivo que seu pensamento raramente confuso contivesse nesse ponto as duas falhas que deformariam o pensamento científico grego. Ele argumenta de forma abstrata, sem se referir à observação, e também parece admitir as noções aristotélicas de um universo harmônico e finalista.

É difícil imaginar como Arquimedes harmonizou esse último ponto de vista com sua idéia revolucionária de que todo o universo podia estar contido na matemática e ser descrito por ela.

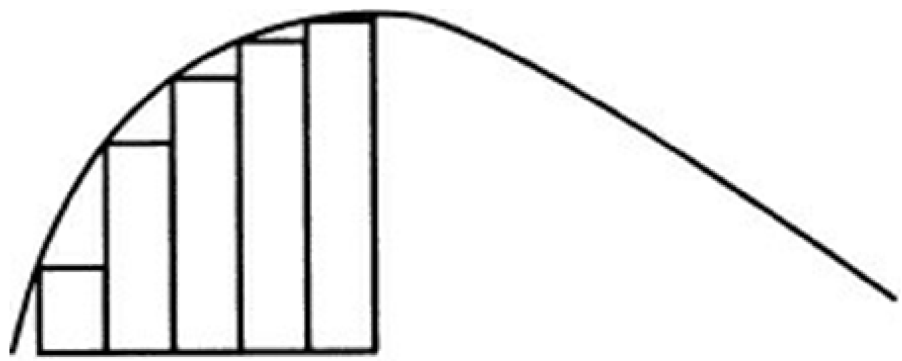
Sua compreensão dessa idéia era muito similar a nossa — muito além da mística pitagórica segundo a qual "tudo é número". No século III a.C. a matemática tinha se transformado, em parte graças à sua contribuição, em um instrumento de sutileza e sofisticação muito à frente das noções aristotélicas de harmonia e finalidade. Em determinados campos vitais, no entanto, prevalecia a antiga concepção. O próprio Arquimedes não conseguira livrar-se totalmente das antigas viseiras. (Esse curioso resquício não é raro entre as mentes privilegiadas. Newton acreditou na alquimia a vida inteira, e somente no século XIX o filósofo alemão Hegel admitiu que só podiam haver sete planetas pela mesma razão mística de Pitágoras.)

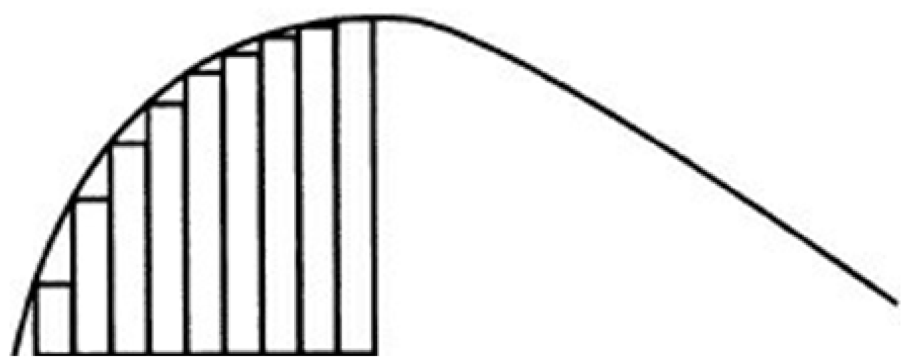
Todas as obras de Arquimedes anteriormente mencionadas (exceto *Sobre a constituição da esfera)* sobreviveram através da Idade Média até os dias atuais. Sabe-se que muitas outras desapareceram, inclusive seu *Método acerca dos teoremas mecânicos.* Referências medievais e antigas a esse tratado indicam que foi sem dúvida uma das obras mais importantes de Arquimedes, possivelmente *a* obra principal.

Em 1899, um sábio grego que trabalhava na biblioteca do mosteiro do Santo Sepulcro em Jerusalém fez ligeira referência a um palimpsesto medieval. (Um rolo de pergaminho onde a escrita original havia sido apagada para dar lugar a um segundo texto.) O palimpsesto consistia em um eucológio de orações e rituais ortodoxos gregos do século XIII. Por baixo, porém, apenas se podia discernir um texto anterior indistinto contendo símbolos matemáticos. Uma referência a esse manuscrito chamou a atenção do filólogo clássico dinamarquês J.L. Heiberg, grande historiador da matemática, que finalmente conseguiu rastrear as pistas do palimpsesto até Constantinopla (Istambul) em 1906, após o que fez uma série de descobertas sensacionais. A escrita original no palimpsesto continha textos de Arquimedes datados do século X. E entre esses encontrava-se sua extensa obra-prima perdida, o *Método acerca dos teoremas mecânicos.* Outros textos confirmavam que *O stomachion* — que por tanto fora descartada como obra de Arquimedes, mesmo pelo próprio Heiberg — era de fato de sua autoria.

O conteúdo do *Método* comprovou-se não menos extraordinário que sua descoberta. Era adequadamente dirigido ao mais brilhante colega de Arquimedes, Eratóstenes de Alexandria, e revelava nada menos que os segredos de seu gênio. É a obra na qual Arquimedes mostra *como* fez suas descobertas — a maneira como sua mente avançou em direção às verdades matemáticas, bem antes de ser capaz de prová-las.

Antes da descoberta desse tratado, os matemáticos estavam cientes de que faltava esse aspecto nas obras de Arquimedes. Seus teoremas eram todos sustentados por provas rigorosas, mas era evidente que ele não podia ter usado essas provas para *descobrir* as verdades que continham. Somente a leitura do *Método* torna patente que Arquimedes apoiou-se solidamente no método “mecânico” para chegar a muitos de seus achados. Ele usava esse precursor do cálculo, implicando quantidades cada vez menores para “esgotar” os espaços que não podiam ser explicados. Por exemplo, estreitanto-se as faixas oblongas abaixo de uma curva:



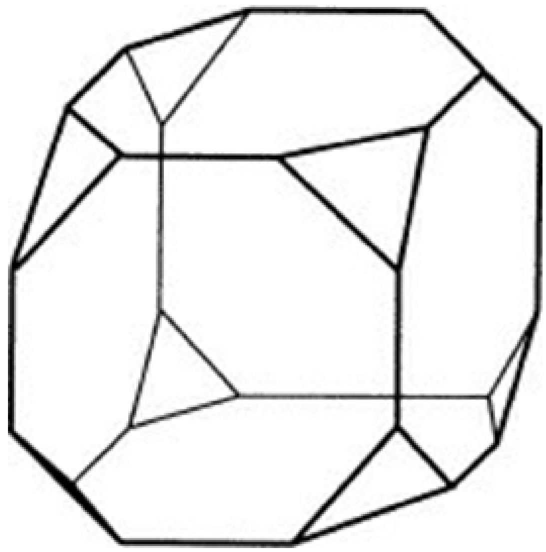


Conforme mencionado anteriormente, a grande inovação desse método de “exaustão” era que ele se baseava na *aproximação.* Antes disso, os matemáticos haviam pensado apenas em termos de respostas precisas. Um cálculo era ou certo ou errado. Esse conceito de *aproximar-se cada vez mais* da resposta, ou de estreitar os limites *entre os quais reside a resposta,* era inteiramente novo. Tanto assim que não era aceito como prova pelos rigorosos padrões mantidos pelos gregos. O próprio Arquimedes considerava esse método “mecânico” apenas “um artifício heurístico”, ou seja, algo útil para se chegar a verdades.

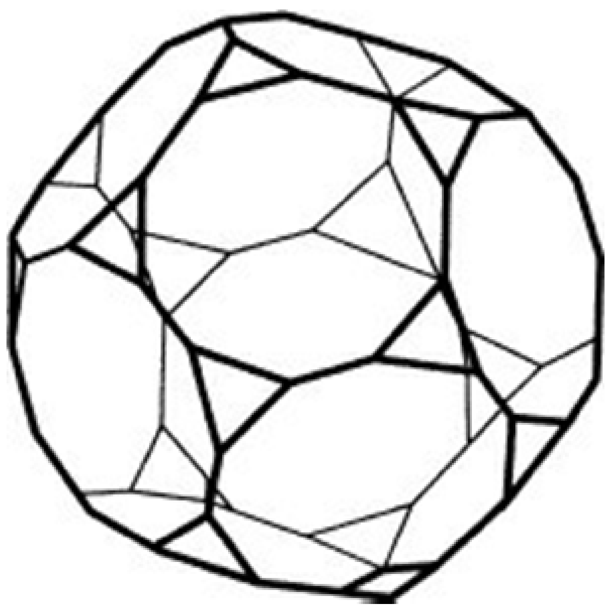
No entanto, ele estava bem consciente da importância de sua descoberta. Conforme explicou a Eratóstenes: “Considero necessário expor esse método por duas razões. Primeiramente, já o mencionei a você sem explicar o que ele é e não quero que pense que estava apenas blefando. E, em segundo lugar, porque estou convencido de que será de grande valor para os matemáticos. Meus contemporâneos, e meus sucessores, serão capazes de usá-lo para descobrir outros teoremas novos, como os que ainda não me ocorreram." Arquimedes não estava enganado. De fato, essa profecia seria finalmente cumprida além de qualquer expectativa possível. O cálculo, desenvolvido a partir desse método, foi descrito como "a mais útil ferramenta matemática jamais inventada para descrever o funcionamento do mundo".

Outras obras "perdidas" de Arquimedes não foram ainda redescobertas — e quase com certeza jamais o serão. Muitos acreditam que os originais dessas obras viraram fumaça quando a Biblioteca de Alexandria incendiou-se em 47 a.C. Essa catástrofe cultural única deixaria uma imensa sombra, desempenhando papel não pouco relevante na decadência intelectual da Idade Média. É agradável imaginar que, estivessem todas as obras de Arquimedes disponíveis no começo do segundo milênio, poderiam ter inclinado a balança — tornando o pensamento medieval uma peça de rigor em lugar de um objeto ritual.

Referências a essas obras perdidas aparecem em várias fontes, de Ovídio a Lucrécio, que no entanto raras vezes oferecem mais que uma sugestão de seu conteúdo. Uma das mais estimulantes é o tratado sobre catóptrica, que trata da reflexão e de espelhos e no qual, segundo relatos, ele pesquisou a refração (algo em torno de um milênio e meio antes que alguém pensasse nesse fenômeno cientificamente). Segundo Pappus, geômetra de Alexandria seu contemporâneo, Arquimedes também escreveu um tratado sobre poliedros semi-regulares, ou seja, figuras convexas tridimensionais cujos lados são constituídos de dois ou mais tipos de polígonos regulares e que são idênticos em seus vértices. (Usa-se princípio similar na confecção de uma bola de futebol.) Um exemplo simples de um poliedro semi-regular é um cubo truncado.



Mais complexo é o dodecaedro truncado — um sólido regular de doze lados com os cantos aparados.



No todo, Arquimedes pesquisou 13 dessas figuras, que hoje são conhecidas como poliedros arquimedianos, em sua homenagem.

Várias fontes se referem a um enigma matemático que Arquimedes teria enviado a Eratóstenes, desafiando os matemáticos de Alexandria a solucioná-lo. Trata-se do célebre “Problema do Gado”. O problema só chegou até nós sob a forma de poema, o qual não podia de modo algum ter sido escrito por Arquimedes — totalmente inábil quando se tratava de métrica. Isso suscitou dúvidas sobre ele ser ou não o autor do problema, embora sua complexidade por si só fale a favor dessa hipótese.

O poema se inicia com ilusória simplicidade arcádica:

> “Hélio, o rei sol, levou seu rebanho de vacas e touros
> À ilha da Sicília e deixou-os a pastar nas colinas… ”

O gado tinha quatro cores diferentes. Alguns animais eram brancos, outros cinzentos, outros castanhos e o restante malhados.

O número de touros malhados era menor que o de touros brancos por 5/6 do número de touros cinzentos.

Isso significava menos que o número de touros cinzentos por 9/20 do número de touros castanhos.

Isso correspondia a menos que o número de touros castanhos por 13/42 do número de touros brancos.

O número de vacas brancas era, no entanto, 7/12 do número de vacas e touros cinzentos somados.

O número de vacas cinzentas era 9/20 do número de vacas e touros castanhos somados.

O número de touros castanhos era 11/30 do número de vacas e touros malhados somados. O número de vacas malhadas era 13/42 do número de vacas e touros brancos.

Quantas vacas e quantos touros eram de cada cor no rebanho de Hélio, o deus Sol?

Só nos resta especular sobre a reação dos sábios de Alexandria ante esse desafio ao talento matemático masculino — ou feminino. (Embora continuassem raras, sabe-se que houve algumas mulheres matemáticas durante esse período. A mais célebre talvez tenha sido Agnodice, forçada a se ocultar sob roupas de homem para estudar em Alexandria; Axiotéia, por outro lado, adotou esse disfarce por vontade própria quando deu aulas na Academia de Platão. Relatos dão conta de que outra estudiosa de Alexandria, Ifigênia de Cós, teria demonstrado que uma prova de seu tutor, o grande geômetra Pappus, era de fato fraudulenta.)

Voltemos, porém, a outro tipo de disparate. O Problema do Gado de Arquimedes pode ser expresso em fórmulas contendo oito incógnitas. É um problema de análise indeterminada, o que significa que há mais de um conjunto correto de respostas. No entanto, há evidências de que até Arquimedes teve dificuldades nesse ponto. Ele pode ter conseguido confundir seus rivais alexandrinos, mas conseguiu também confundir a si próprio. Mesmo o menor conjunto de respostas corretas implica milhões. Por exemplo, o menor número correto de touros brancos é

10.366.482 e o de vacas brancas, 7.206.360. As respostas mais baixas (e a única) de Arquimedes são cerca de 80 vezes essas cifras e ainda assim não estão totalmente corretas. (E dessa vez ele não tinha a desculpa de estar usando uma forma embrionária de cálculo aproximativo!) De qualquer modo, esse problema parece ter gerado uma quantidade similar da substância que o vasto rebanho de Hélio deve ter depositado sobre as colinas da Sicília.

Arquimedes parece ter vivido a habitual vida excêntrica de um matemático. Quieta, solitária e silenciosamente trivial — excetuadas as esporádicas e espetaculares incursões na arena pública (correndo nu pelas ruas gritando “Eureca!”, lançando sozinho o precursor siracusiano do *Titanic* etc.) No final da vida, porém, os fatos finalmente o venceram e ele foi forçado mais uma vez a ocupar com relutância uma posição no cenário público.

Nas últimas décadas no século III a.C. o Mediterrâneo estava envolvido em uma disputa de poder entre as duas superpotências locais — Roma, expandindo-se para fora do território italiano, e Cartago, espalhando-se além dos litorais do norte da África. Em 218 a.C., esse conflito desencadeou a Segunda Guerra Púnica, com Aníbal liderando seus elefantes através dos Alpes para atacar Roma. A Sicília era de importância estratégica vital para os dois lados e, em 214 a.C., o general romano Marcelo impôs o cerco a Siracusa.

Arquimedes era então um homem idoso, na casa dos 70 anos — idade venerável numa época em que se sentiam felizes os que viviam mais de 30. Apesar disso, foi encarregado da defesa de Siracusa. As muralhas da cidade desciam perpendicularmente até o mar, mas ainda assim permaneciam vulneráveis ao ataque da poderosa esquadra romana. Dessas muralhas, Arquimedes supervisionou pessoalmente as operações militares.

Usando toda a sua engenhosidade científica, construiu uma máquina que arremessava enormes pedras contra a armada inimiga. Aparentemente tratava-se de algum tipo de catapulta. Construiu também guindastes que se precipitavam por cima das muralhas e deixavam cair grandes pedaços de rocha que destruíam o convés das embarcações romanas. E usou um artifício semelhante para deslizar por baixo da proa dos navios e içá-los para fora da água.

O comandante romano Marcelo decidiu destruir as muralhas. Ordenou a suas qüinqüerremes que se mantivessem unidas, com os mastros amarrados a um dos lados das sambucas (escadas largas que podiam ser baixadas junto aos muros). Em seguida remaram freneticamente em direção às muralhas da cidade, com o convés abarrotado de soldados. Arquimedes parece ter previsto isso e usou algum tipo de engenho (mais uma vez provavelmente incluindo guindastes) que fisgava as sambucas e as arrancava das muralhas antes que os soldados tivessem tempo de escalá-las.

O mais engenhoso de todos era um dispositivo feito de vários espelhos pequenos que convergiam os raios do sol para as naus romanas. Esse aparelho podia operar “à distância de uma flechada”, segundo Plutarco, “tornando o ar tão denso que ele se inflamava e incendiava os navios”. O relato de Plutarco é geralmente descartado como fantasioso. No entanto, uma curiosa “máquina arquimediana” similar parece ter sido usada no cerco de Constantinopla em 514 a.C. Em 1774, o conde francês de Buffon, naturalista e construtor de máquinas excêntricas, decidiu conferir esses relatos. Construiu um prato côncavo contendo 168 espelhos, que ele pensava ser capaz de incendiar madeira a 50 metros e que, a uma distância menor, tinha capacidade suficiente para derreter chumbo.

Relata-se que o comandante romano Marcelo ficou impressionadíssimo com os feitos científicos de seu adversário. Tanto que, quando a cidade foi finalmente vencida em 212 a.C., determinou que sua vida fosse poupada. A estória que se segue é quase tão conhecida quanto o incidente do “Eureca!” e, da mesma forma, varia segundo a fonte. A versão mais dramática fala de um Arquimedes profundamente imerso em cálculos matemáticos enquanto as tropas romanas saqueavam a cidade. A despeito dos distúrbios nas ruas, ele continuava a desenhar círculos em sua bandeja de areia plana (o equivalente contemporâneo de um computador pessoal). Foi interrompido por uma sombra que incidia sobre seus desenhos. Olhou para cima e viu um soldado romano. “Por favor, não interrompa meus cálculos”, disse, admoestando-o. Mas o soldado, cansado da batalha, naturalmente não estava disposto a qualquer demonstração matemática. Brandindo sua espada, ordenou que Arquimedes o acompanhasse, mas este se recusou a se mexer antes de concluir os cálculos. Após o que o exasperado romano golpeou-o, matando o velho obstinado.

Esta cena está retratada em um famoso mosaico desenterrado em Herculano, a cidade destruída ao lado de Pompéia pelo Vesúvio no ano 79. Esse mosaico dificilmente pode ser considerado uma testemunha ocular. (Os repórteres, mesmo na era romana, não ilustravam suas matérias com mosaicos.) Ele sugere, no entanto, que o lendário episódio da morte de Arquimedes pode ter se apoiado em fatos.

Marcelo irritou-se profundamente quando soube do que acontecera ao matemático de 79 anos de idade — reconhecido, já nessa época, como o maior talento matemático que o mundo até então conhecera. Conta-se que foram dispensadas honrarias aos dependentes de Arquimedes, o que sugere que ele talvez tivesse sido casado. Marcelo deu ordens também para que o túmulo de Arquimedes fosse entalhado com uma esfera inscrita dentro de um cilindro, tal como ele desejara.

Esse último detalhe da lenda é verídico e chegou até nós pelos escritos de Cícero, o orador e estadista romano. Em 75 a.C., Cícero foi nomeado questor (tesoureiro geral) da Sicília. Ele descreve como saiu um dia procurando ao redor das muralhas de Siracusa o famoso local do túmulo de Arquimedes. Em suas próprias palavras: “Finalmente localizamos o cemitério, cercado por moitas de arbustos e touceiras de espinhos. Eu sabia o que procurar, já que ouvira que alguns versos estavam escritos em seu túmulo. Lembrei-me que afirmavam que uma esfera e um cilindro tinham sido inscritos em seu túmulo. Há uma enorme quantidade de túmulos no Portão Agrigentino e tive de procurar por algum tempo. Notei então uma pequena coluna que sobressaía acima dos arbustos. Nela, mal consegui perceber uma inscrição de uma esfera e um cilindro. Foram enviados escravos com foices e, tão logo eles abriram uma trilha no matagal, aproximamo-nos da coluna. O poema inscrito era apenas perceptível, com somente alguns versos ainda legíveis e a última parte apagada."

Além do famoso mosaico, cuja representação é duvidosa, a única outra imagem conhecida de Arquimedes encontra-se em uma moeda siciliana que data do final do século III a.C. aproximadamente. É impossível avaliar a fidedignidade desse retrato. A imagem do talento de Arquimedes que, no entanto, chegou até nós através de seus textos é inequívoca. Ninguém senão um supremo gênio matemático poderia ter criado as obras que produziu. Essa imagem de Arquimedes sobreviverá tanto quanto a própria matemática.

Posfácio

No momento da morte de Arquimedes, a Magna Grécia caía sob o jugo do Império Romano. Em meados do século seguinte, Roma derrotaria a própria Grécia e a grande era da antiga cultura grega chegava ao fim. O pensamento grego foi relegado a mero ornamento pelo Império Romano. Não servia a qualquer finalidade prática. O gênio romano voltava-se para a engenharia, a ordem cívica e o militarismo. Sua contribuição à matemática permanece um vazio. O único romano a desempenhar um papel na história da matemática foi o soldado que matou Arquimedes.

A influência de Arquimedes sobre as gerações que se seguiram foi mínima. A grandiosidade de suas conquistas foi simplesmente desdenhada, embora suas fórmulas, como as que se referem à área da superfície e ao volume da esfera, tenham se tornado parte do cânone matemático padrão. Da mesma forma, sua aproximação facilmente inteligível de π como sendo 22/7 foi também absorvida. Estava correta até três casas decimais — o que era suficiente para os romanos. Embora Arquimedes tivesse esperanças de que seu "método mecânico" (inclusive exaustão, limites etc.) levasse a novas conquistas matemáticas, isso não iria acontecer. Somente quando suas obras foram traduzidas para o árabe no século VIII, seu desejo começou a se concretizar. Enquanto a Europa se arrastava na escuridão, foram os árabes que finalmente reiniciaram a matemática — que permanecera estagnada por um milênio.

As obras de Arquimedes sobreviveram, assim, de uma forma ou outra, até a Idade Média e além dela. Suas idéias práticas pareciam não contradizer a ortodoxia aristotélica, o que significava que eram aceitáveis para o espírito medieval. O que fez, no entanto, esse espírito medieval das grandes obras teóricas de Arquimedes? Quase nada, parece. Na Europa, a matemática continuava estagnada. Será? Alguns estudiosos continuam convencidos de que, *em algum lugar* da Europa, *alguém* deve ter dado o justo valor à obra de Arquimedes, e ter sido por ela inspirado, para levá-la adiante. A matemática prescinde de tradição social e pode facilmente ser praticada por um monge solitário numa remota comunidade insular ou por um estudioso numa universidade ou um sábio a serviço de uma corte. Bastariam as obras de Arquimedes e alguém com inteligência suficiente para usar seu método. Um único gênio solitário poderia facilmente e por si mesmo ter feito evoluir a matemática (e ter passado adiante suas obras, poupando a civilização de séculos de estagnação intelectual). No entanto, ainda está por ser encontrada a prova da existência desse gênio perdido.

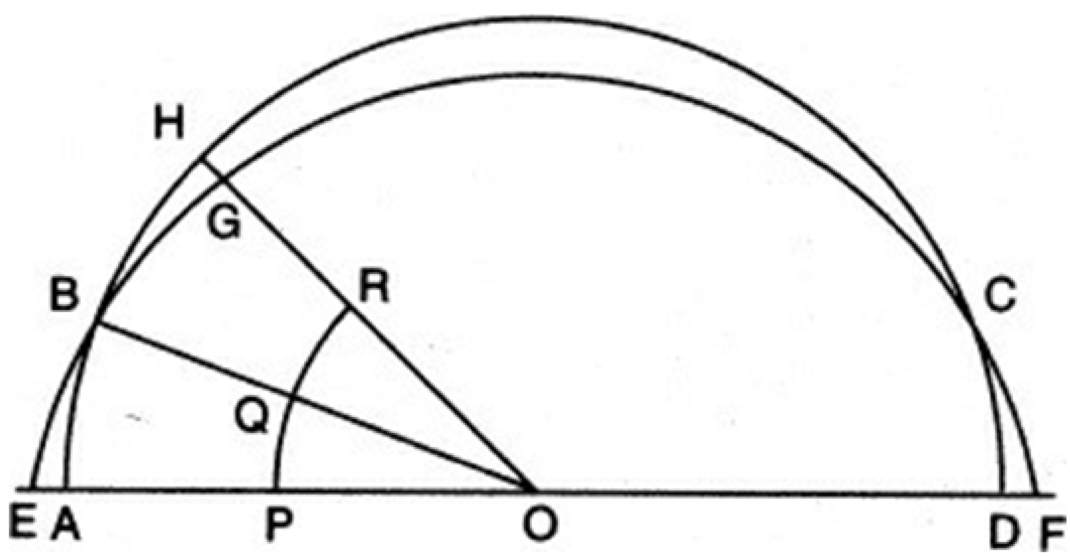
Em sua maior parte, a matemática continuou a ser útil apenas como instrumento prático. A capacidade humana para o pensamento matemático abstrato permaneceu inaproveitada — exceto talvez para calcular a quantidade de anjos que poderia caber numa cabeça de alfinete. O impulso rumo à abstração foi deturpado e visto como especulação teológica estéril. Essa situação mudou muito pouco até o Renascimento e, somente em meados do século XVI, Arquimedes passou de fato a inspirar grandes talentos — como Kepler e Galileu. Ainda assim, outro século se passaria antes que Newton aperfeiçoasse o método de Arquimedes e inventasse o cálculo. Quando indagado sobre como chegara a suas grandes descobertas, Newton dava sua famosa resposta: "Se vi urn pouco alem dos outros, foi porque subi nos ombros de gigantes." Essa modéstia, no entanto, era apenas aparente. Newton estava bem consciente de que era um gigante, mesmo entre gigantes. E o Uni.co gigante que reconhecia como seu igual era Arquimedes.

Arquimedes em Ação

Duas provas de Arquimedes:

Sobre os corpos flutuantes, livro 1, Proposição 2

A superfície de qualquer fluido em repouso é a superfície de uma esfera cujo centro é igual ao da Terra.



Suponhamos que a superfície do fluido seja cortada por um plano através de O, o centro da Terra, na curva ABCD.

ABCD será a circunferência de um círculo.

Porque, se não, algumas das linhas traçadas de O até a curva serão desiguais. Tomemos uma delas, OB, de tal forma que OB seja maior que algumas das linhas de O até a curva e menor que outras. Tracemos um círculo tendo OB por raio. Ou seja, EBF, que por isso ficará parcialmente dentro e parcialmente fora da superfície do fluido.

Tracemos OGH fazendo com OB um ângulo igual ao ângulo EOB, encontrando a superfície em H e o círculo em G. Tracemos também no plano um arco de um círculo PQR com centro em O e dentro do fluido.

Assim, as partes do fluido ao longo de PQR são uniformes e contínuas e a parte PQ é comprimida pela parte entre ela e AB, enquanto a parte QR é comprimida pela parte entre QR e BH.

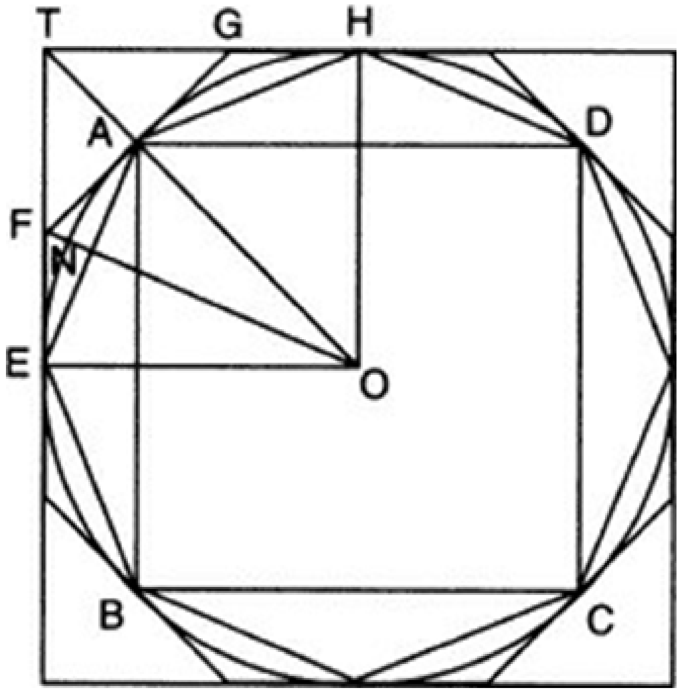
Por conseguinte, as partes ao longo de PQ e QR serão comprimidas de forma desigual e a parte menos comprimida será posta em movimento pela mais comprimida.

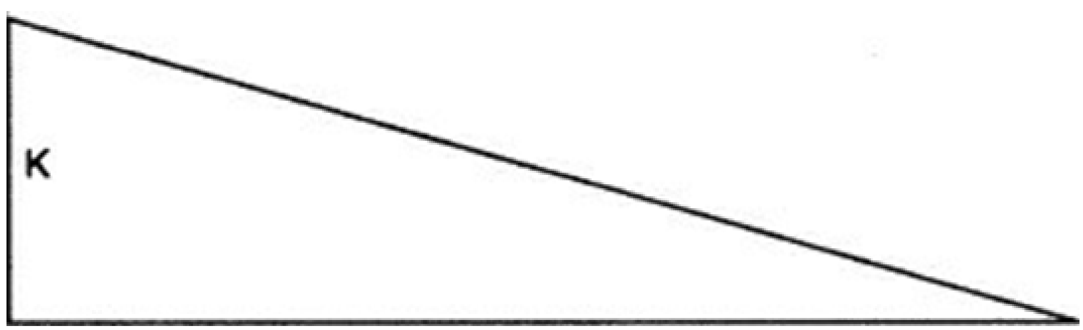
Conseqüentemente não haverá repouso; o que é contrário à hipótese.

Assim, a seção da superfície será a circunferência de um círculo cujo centro é O; e o mesmo sucederá a todas as outras seções por planos através de O.

Assim, a superfície é igual à de uma esfera com centro em O. Medida de um círculo — Proposição 1

A área de qualquer círculo é igual a qualquer triângulo retângulo no qual um dos lados sobre o ângulo reto é igual ao raio, e o outro à circunferência, do círculo.





Seja ABCD o círculo dado, K o triângulo descrito.

Em seguida, se o círculo não for igual a K, deverá ser maior ou menor.

1. Se possível, façamos o círculo maior que K.

Inscrevamos um quadrado ABCD, seccionemos os arcos AB, BC, CD, DA e, em seguida, seccionemos (caso seja necessário) as metades e assim por diante, até que os lados do polígono inscrito, cujos pontos angulares sejam os pontos da divisão, subtendam segmentos cuja soma é menor que o excesso da área do círculo sobre K.

Assim, a área do polígono é maior que K.

Tomemos AE como um de seus lados e ON como a perpendicular em AE ao centro O.

ON é então menor que o raio do círculo e, por conseguinte, menor que um dos lados sobre o ângulo reto em K. Também o perímetro do polígono é menor que a circunferência do círculo, ou seja, menor que o outro lado sobre o ângulo reto K.

Portanto, a área do polígono é menor que K; o que é incoerente com a hipótese. Assim, a área do círculo não é maior que K.

2. Se possível, façamos o círculo menor que K.

Circunscrevamos um quadrado e façamos com que dois lados adjacentes, tocando o círculo em E e H, se encontrem em T. Seccionemos os arcos entre os pontos adjacentes de contato e desenhemos as tangentes nos pontos de secção. Façamos A o ponto do meio do arco EH, e FAG a tangente em A.

Então o ângulo TAG é um ângulo reto. Por isso TG > GA > GH

Segue-se que o triângulo FTG é maior que a metade da área TEAH.

Analogamente, se o arco AH for seccionado e a tangente no ponto de secção for traçada, ela será separada da área GAH em mais da metade etc.

Assim, mediante a continuação do processo, chegaremos em última instância a um polígono circunscrito, de tal forma que os espaços interceptados entre ele e o círculo somados são menores que o excesso da área do círculo sobre K.

Logo, a área do polígono será menor que K.

Já que a perpendicular de O em qualquer lado do polígono é igual ao raio do círculo, enquanto o perímetro do polígono é maior que a circunferência do círculo, segue-se que a área do polígono é maior que o triângulo K; o que é impossível.

Conseqüentemente, a área do círculo não é menor que K.

Uma vez que a área do círculo não é maior nem menor que K, é igual a ele.

Daí Arquimedes parte para provar que a circunferência de um círculo é igual a:

[pi] x diâmetro

Que a área de um círculo é igual a:

$[pi] \times (raio)^2$

E que o valor de [pi] é:

$< 3\ {}^{1/7}$ mas $> 3\ {}^{10/71}$

Cronologia da Grécia Antiga

1184 a.C. - Cerco de Tróia

776 a.C. - Primeiros Jogos Olímpicos

700 a.C. - Época de Homero

585 a.C. - Eclipse solar previsto por Tales de Mileto, o primeiro filósofo

545 a.C. - O Império Persa ocupa a Jônia (hoje a costa do Egeu do território turco)

533 a.C. - Primeiro concurso de tragédia grega vencido por Téspis

490 a.C. - Os persas são derrotados em Maratona

490 a.C. - Nascimento de Heródoto, “o pai da história”

462 a.C. - Anaxágoras torna-se o primeiro filósofo a morar em Atenas Início da Primeira Guerra do Peloponeso entre Esparta e Atenas.

460 a.C. - Nascimento de Hipócrates, maior médico grego, responsável pelo juramento hipocrático

447 a.C. - Começam as obras do Partenon de Atenas

429 a.C. - A morte de Péricles marca o fim da época de ouro de Atenas

427 a.C. - Nascimento de Platão

404 a.C. - A derrota de Atenas por Esparta marca o fim das Guerras do Peloponeso

399 a.C. - Sócrates condenado à morte em Atenas

329 a.C. - Alexandre, o Grande, chega à Índia

322 a.C. - Morte de Aristóteles

300 a.C. - Euclides escreve em Alexandria

290 a.C. - Fundação da Biblioteca de Alexandria

287 a.C. - Nascimento de Arquimedes

264-241 a.C. - Primeira Guerra Púnica entre Roma e Cartago

218 a.C. - Segunda Guerra Púnica, com Aníbal invadindo a Itália

212 a.C. - Morte de Arquimedes

211 a.C. - Fim da Segunda Guerra Púnica, com o controle romano sobre a Sicília

168 a.C. - Derrota romana na Macedônia

146 a.C. - Saque de Corinto, a Grécia cai sob o domínio romano

Leitura Sugerida

Paul Strathern: Pitágoras e seu teorema em 90 minutos (Jorge Zahar)

E.J. Dijksterhuis: Arquimedes (Munksgaard) — A melhor "vida e obra", traduzida do dinamarquês: eventualmente reeditada, mas ainda rara.

E.T. Bell: Men of Mathematics (Longman) — A obra clássica sobre o assunto; mais de 30 personalidade e suas obras desde a Grécia antiga ao início do século XX.

Euclides, Arquimedes, Nicômaco: Great Books of the Western World vol.10 (Britannica) — As obras completas na tradução modelo de Thomas L. Heath.

Cambridge Dictionary of Scientists (Cambridge) — Um bom panorama sobre os contemporâneos de Arquimedes.