Francisco de Quevedo

La vida del Buscón

Real Academia Española

AMOR E MATEMÁTICA

AMOR E MATEMÁTICA

EDWARD FRENKEL

o coração da realidade escondida

Tradução
Carlos Szlak

Casa da Palavra

Este livro foi revisado segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Copidesque: OLIVIA HAIAD
Revisão: TIAGO RAMOS
Revisão técnica: PAULO NEY DE SOUZA
Capa: D29/LEANDRO DITTZ E SÍLVIA DANTAS
Imagem de capa: JENNIFER GOTTSCHALK / SHUTTERSTOCK.COM
Diagramação: ABREU'S SYSTEM
Fechamento de arquivo de miolo: BOOKS IN BITES e CASA EDITORIAL MALUHY & Co.
Impressão e Acabamento: Corprint Gráfica e Editora Ltda.

F94a
Frenkel, Edward, 1968-

Amor e matemática : o coração da realidade escondida / Edward Frenkel; tradução Carlos Szlak. -1. ed. - Rio de Janeiro : Casa da Palavra, 2014.
368 p. : il. ; 23 cm.

Tradução de: Love & math : the heart of hidden reality
ISBN 978-85-7734-505-2

1. Matemática. 2. Matemática - História. I. Título.

14-15444

CDD: 510.9
CDU: 51(09)

CASA DA PALAVRA PRODUÇÃO EDITORIAL
Av. Calógeras, 6, 701 - Rio de Janeiro – RJ – 20030-070
21.2222 3167 21.2224 7461
divulga@casadapalavra.com.br
www.casadapalavra.com.br

Para os meus pais

Sumário

Prefácio

Há um mundo secreto lá fora. Um universo paralelo oculto de beleza e elegância, entrelaçado intricadamente com o nosso. É o mundo da matemática. E ele é invisível para a maioria de nós. Este livro é um convite para a descoberta desse mundo.

Considere esse paradoxo: por um lado, a matemática está urdida na própria trama do nosso cotidiano. Todas as vezes que fazemos uma compra on-line, enviamos uma mensagem de texto, realizamos uma busca na Internet ou usamos um GPS, as fórmulas matemáticas e os algoritmos estão presentes. Por outro lado, a maioria das pessoas se amedronta com a matemática. Tornou-se, nas palavras do poeta Hans Magnus Enzensberger, "um ponto cego da nossa cultura – território estranho, em que apenas uma elite, um pequeno número de iniciados conseguiu se entrincheirar". É raro, ele afirma, "encontrar uma pessoa que afirme com veemência que a mera ideia de ler um romance, observar uma pintura ou ver um filme lhe cause um suplício insuportável", mas "pessoas sensíveis, educadas" muitas vezes dizem, "com uma mistura notável de desafio e orgulho", que a matemática é "tortura pura" ou um "pesadelo" que "as incomoda".

Como essa anomalia é possível? Enxergo dois motivos principais. Primeiro, a matemática é mais abstrata do que outras matérias; portanto, não tão acessível. Segundo, o que estudamos na escola é apenas uma parcela diminuta da matemática, cuja maior parte foi estabelecida há mais de mil anos. Desde então, ela avançou tremendamente, mas os tesouros da matemática moderna foram mantidos ocultos da maioria de nós.

E se na escola você tivesse uma aula de artes em que somente lhe ensinassem como pintar uma cerca? E se jamais lhe mostrassem as pinturas de Leonardo da Vinci e Picasso? Isso faria você apreciar as artes plásticas? Você gostaria de aprender mais a respeito do assunto? Duvido. Provavelmente, você diria algo assim: "Aprender artes plásticas na escola era perda de tempo. Se alguma vez precisasse que minha cerca fosse pintada, simplesmente contrataria alguém que fizesse isso para mim." Claro que isso parece ridículo, mas é como a matemática é ensinada, e, assim, na opinião da maioria, aprendê-la se torna o equivalente a ver tinta secar, ou seja, algo muito entediante. Enquanto as pinturas dos grandes mestres estão prontamente disponíveis, a matemática dos grandes mestres está guardada a sete chaves.

No entanto, não é só a beleza estética da matemática que é cativante. Como Galileu afirmou de modo memorável: "As leis da natureza estão escritas na linguagem da matemática." A matemática é a maneira de descrever a realidade e entender como o mundo funciona; uma linguagem universal que se tornou o padrão-ouro da verdade. Em nosso mundo, progressivamente orientado pela ciência e a tecnologia, a matemática está se tornando cada vez mais fonte de poder, riqueza e progresso. Portanto, aqueles que forem fluentes nessa nova linguagem estarão na vanguarda do progresso.

Uma das concepções erradas comuns sobre a matemática é que ela só pode ser utilizada como um "kit de ferramentas": um biólogo, digamos, faz um trabalho de campo, coleta dados e, então, procura desenvolver um modelo matemático encaixando esses dados (talvez com a ajuda de um matemático). Embora seja um modo de operação importante, a matemática nos oferece *muito mais:* ela nos permite dar saltos inovadores, de mudança paradigmática, que não poderíamos dar de outra maneira. Por exemplo, Albert Einstein não estava tentando encaixar dados nas equações quando entendeu que a gravidade faz nosso espaço se curvar. De fato, não existiam esses dados. Na época, ninguém podia imaginar que nosso espaço é curvo; todos “sabiam” que nosso universo era plano. No entanto, Einstein entendeu que essa era a única maneira de generalizar sua teoria da relatividade especial em sistemas não inerciais, em conjunto com seu *insight* de que a gravidade e a aceleração têm o mesmo efeito. Foi um exercício intelectual de alto nível dentro do âmbito da matemática, no qual Einstein se valeu do trabalho de um matemático, Bernhard Riemann, concluído cinquenta anos antes. O cérebro humano é condicionado Riemann, de tal maneira que simplesmente não conseguimos imaginar espaços curvos de dimensão maior do que 2; só podemos acessá-los por meio da matemática. E adivinhem: Einstein tinha razão; nosso universo é curvo e, além disso, está se expandindo. Esse é o poder da matemática do qual estou falando.

Diversos exemplos como esse podem ser encontrados não só na física, mas em outras áreas da ciência (discutiremos algumas delas posteriormente). A história revela que a ciência e a tecnologia se transformam em ritmo acelerado por meio das ideias matemáticas; mesmo as teorias matemáticas que são inicialmente vistas como abstratas e esotéricas se tornam posteriormente indispensáveis para aplicações. Charles Darwin, cuja obra a princípio não recorreu à matemática, escreveu em sua autobiografia: “Arrependi-me muito de não ter avançado o suficiente para entender algo dos grandes princípios da matemática, pois os homens assim dotados parecem ter um sentido extra.” Considero essa afirmação um conselho visionário para as próximas gerações se beneficiarem do imenso potencial da matemática.

Durante meu crescimento, não tinha consciência do mundo oculto da matemática. Como a maioria das pessoas, achava que era um assunto chato, insípido. Mas tive sorte: no meu último ano do ensino médio, conheci um matemático profissional que abriu este mundo mágico para mim. Aprendi que a matemática é cheia de possibilidades infinitas, e também de elegância e beleza, exatamente como a poesia, as artes plásticas e a música. Fiquei apaixonado.

Caro leitor, com este livro quero fazer por você o que meus professores e mentores fizeram por mim: revelar o poder e a beleza da matemática, e permitir que *você* entre nesse mundo mágico da mesma maneira que entrei, mesmo se você for o tipo de pessoa que jamais utilizou as palavras "matemática" e "amor" na mesma frase. A matemática o impressionará exatamente como me impressionou, e sua visão de mundo nunca mais será a mesma.

O conhecimento matemático é diferente de qualquer outro conhecimento. Embora nossa percepção do mundo físico possa sempre ser distorcida, nossa percepção das verdades matemáticas não pode ser. Estas são verdades objetivas, persistentes, necessárias. Uma fórmula ou um teorema matemático significam a mesma coisa para qualquer um, em qualquer lugar – independentemente do gênero, da religião ou da cor da pele; significarão a mesma coisa para qualquer um daqui a mil anos. E o que também é incrível é que somos donos de todas as fórmulas ou teoremas. Ninguém pode patentear uma fórmula matemática; ela é nossa, para compartilharmos. Não há nada no mundo que seja tão profundo e refinado e, ao mesmo tempo, tão prontamente disponível para todos. É quase inacreditável que realmente exista esse reservatório de conhecimento. Ele é muito precioso para ser deixado nas mãos de um "pequeno número de iniciados". Pertence a todos nós.

Entre uma das funções básicas da matemática, inclui-se o ordenamento das informações. Isso é o que distingue as pinceladas de van Gogh de um mero pingo de tinta. Com o advento da impressão 3D, a realidade à qual estamos acostumados está passando por uma transformação radical: tudo está migrando da esfera dos objetos físicos para a esfera das informações e dos dados. Em pouco tempo, seremos capazes de converter as informações em matéria sob demanda, utilizando impressoras 3D, tão facilmente quanto convertemos agora um arquivo PDF num livro ou um arquivo MP3 numa obra musical. Neste admirável mundo novo, o papel da matemática se tornará ainda mais fundamental: como forma de organizar e ordenar as informações, e como meio de facilitar a conversão de informações em realidade física.

Neste livro, descreveremos uma das maiores ideias da matemática que surgiram nos últimos cinquenta anos: o Programa de Langlands, considerado por muitos a Teoria da Grande Unificação da matemática. É uma teoria fascinante, que entrelaça uma rede de conexões tentadoras entre os campos matemáticos, que, à primeira vista, parecem estar a anos-luz de distância: álgebra, geometria, teoria dos números, análise e física quântica. Se considerarmos esses campos como continentes no mundo oculto da matemática, então o Programa de Langlands é o aparelho de teletransporte supremo, capaz de nos levar instantaneamente de um continente ao outro, e vice-versa.

Proposto no final da década de 1960 por Robert Langlands, o matemático que atualmente ocupa a sala de Albert Einstein no Instituto de Estudos Avançados de Princeton, o Programa de Langlands tem suas raízes numa inovadora teoria matemática de simetria. Suas bases foram assentadas há dois séculos por um prodígio francês, pouco antes de sua morte num duelo, aos 20 anos. Posteriormente, foi enriquecida por outra descoberta impressionante, que não só levou à demonstração do Último Teorema de Fermat, mas revolucionou a maneira pela qual pensamos a respeito dos números e das equações. No entanto, outro *insight* agudo foi que a matemática possui sua própria pedra de Roseta e está repleta de analogias e metáforas misteriosas.

Seguindo essas analogias como riachos na terra encantada da matemática, as ideias do Programa de Langlands se espalharam para os âmbitos da geometria e da física quântica, criando ordem e harmonia do caos aparente.

Quero falar a respeito de tudo isso para expor os lados da matemática que raramente chegamos a ver: inspiração, ideias profundas e revelações surpreendentes. A matemática é uma maneira de quebrar as barreiras do convencional, uma expressão da imaginação ilimitada na busca da verdade. Georg Cantor, criador da teoria do infinito, escreveu: "A essência da matemática está em sua liberdade." A matemática nos ensina a analisar a realidade com rigor, estudar os fatos, segui-los aonde quer que levem. Isso nos liberta de dogmas e preconceitos, fomenta a capacidade de inovação. Portanto, proporciona ferramentas que transcendem o próprio sujeito.

Essas ferramentas podem ser utilizadas para o bem e para o mal, forçando-nos a levar em conta os efeitos da realidade da matemática. Por exemplo, em grande medida, a crise económica mundial foi causada pelo uso disseminado de modelos matemáticos inadequados nos mercados financeiros. Muitos tomadores de decisão não entenderam plenamente esses modelos devido à sua ignorância matemática, mas os usaram de forma arrogante – motivados pela cobiça –, até que essa prática quase destruísse todo o sistema. Eles estavam tirando proveito desleal do acesso assimétrico a informações e esperando que ninguém descobrisse o blefe, pois outros também não estavam inclinados a perguntar como funcionavam esses modelos matemáticos. Talvez se mais pessoas entendessem os modelos, como o sistema realmente operava, não teríamos sido enganados por tanto tempo.

Com outro exemplo, considere isso: em 1996, uma comissão designada pelo governo norte-americano se reuniu em segredo e alterou a fórmula do índice de preços ao consumidor, ou seja, o índice de inflação que corrige os valores do imposto de renda retido na fonte, da previdência social, do sistema de saúde e de outros pagamentos indexados. Dezenas de milhões de norte-americanos foram afetados, mas houve pouca discussão pública a respeito da nova fórmula e suas consequências. E, recentemente, houve outra tentativa de explorar essa fórmula misteriosa de modo furtivo em relação à economia norte-americana.[1]

encoding=*0Um número muito menor desse tipo de acordos de bastidores pode ser realizado numa sociedade matematicamente instruída. Matemática é igual a rigor mais integridade intelectual multiplicado pela confiança nos fatos. Devemos todos ter acesso ao conhecimento matemático e às ferramentas necessárias para nos protegermos das decisões arbitrárias tomadas por alguns poucos poderosos, num mundo cada vez mais orientado pela matemática. Onde não existe matemática, não há liberdade.

A matemática é parte de nossa herança cultural tanto quanto as artes plásticas, a literatura e a música. Como humanos, temos fome de descobrir algo novo, alcançar um novo significado, compreender melhor o universo e o nosso lugar nele. Infelizmente, não podemos descobrir um novo continente como Cristóvão Colombo ou pisar na Lua pela primeira vez. Mas e se eu disser que você não precisa atravessar um oceano ou viajar pelo espaço para descobrir as maravilhas do mundo? Elas estão aqui mesmo, entrelaçadas em nossa realidade presente. De certa maneira, dentro de nós. A matemática direciona o fluxo do universo, espreita atrás de suas formas e curvas, mantém as rédeas de tudo, desde minúsculos átomos até as maiores estrelas.

Este livro é um convite para esse mundo rico e deslumbrante. Eu o escrevi para leitores sem formação em matemática. Se você acha que matemática é difícil e que não consegue entendê-la; se a matemática o aterroriza, mas, ao mesmo tempo, acha que há algo nela que vale a pena conhecer, então este livro é para você.

É um sofisma comum dizer que alguém tem de estudar matemática durante anos para apreciá-la. Alguns até consideram que a maioria das pessoas possui uma deficiência de aprendizado inata quando se trata de matemática. Discordo: a maioria de nós ouviu falar e tem ao menos um conhecimento rudimentar de conceitos como sistema solar, átomos e partículas elementares, a dupla hélice do DNA, e muito mais, sem fazer cursos de física e biologia. E ninguém se surpreende com o fato de que essas ideias sofisticadas são parte de nossa cultura, de nossa consciência coletiva. Da mesma forma, todos conseguem compreender ideias e conceitos básicos da matemática se eles são explicados de modo correto. Para isso, não é necessário estudar durante anos; em muitos casos, podemos ir direto ao ponto e ignorar passos enfadonhos.

O problema é o seguinte: enquanto o mundo inteiro está sempre discutindo sobre planetas, átomos e DNA, provavelmente ninguém jamais falou com você sobre ideias fascinantes da matemática moderna, tais como grupos de simetrias; novos sistemas numéricos, em que 2 mais 2 nem sempre é igual a 4; e belas formas geométricas, como as superfícies de Riemann. É como se lhe mostrassem um gatinho e lhe dissessem que é um tigre. No entanto, na realidade, o tigre é um animal inteiramente diferente. Vou mostrá-lo a você em todo o seu esplendor, e você será capaz de apreciar sua “terrível simetria”, como William Blake afirmou de modo eloquente.

Não me interprete mal: ler este livro não o transformará em um matemático. Nem estou defendendo que todos devam se tornar um. Pense dessa maneira: aprender um pequeno número de acordes permitirá que você toque algumas músicas num violão. Não quero convertê-lo no melhor violonista do mundo, mas isso enriquecerá sua vida. Neste livro, mostrarei a você os acordes da matemática moderna que foram escondidos de você. E prometo que isso enriquecerá sua vida.

Um dos meus professores, o notável Israel Gelfand, costumava dizer: "As pessoas acham que não entendem matemática, mas tudo é uma questão de como a explicamos para elas. Se você perguntar para um bêbado que número é maior, 2/3 ou 3/5, ele não será capaz de dizer. Mas se você reformular a pergunta: o que é melhor, 2 garrafas de vodca para 3 pessoas ou 3 garrafas de vodca para 5 pessoas, ele lhe responderá de imediato: 2 garrafas para 3 pessoas, é claro."

Meu objetivo é explicar a matemática em termos inteligíveis para você.

Também falarei sobre minha experiência de crescer na ex-União Soviética, onde a matemática tornou-se um posto avançado da liberdade diante de um regime opressivo. Tive meu pedido de admissão na Universidade Estadual de Moscou negado por causa das políticas discriminatórias soviéticas. As portas foram fechadas em minha cara. Eu era um excluído. Mas não desisti. Entrava furtivamente na universidade para acompanhar palestras e seminários. Lia livros de matemática por conta própria, às vezes tarde da noite. E, no fim, fui capaz de invadir o sistema. Não me deixaram entrar pela porta da frente, então entrei pela janela, Quando você está apaixonado, quem é capaz de detê-lo?

Dois matemáticos brilhantes me apadrinharam e se tornaram meus mentores. Com a orientação deles, comecei a fazer pesquisa em matemática. Ainda era estudante universitário, mas já estava transpondo as fronteiras do desconhecido. Foi a época mais excitante da minha vida. Alcancei o sucesso, embora tivesse certeza de que as políticas discriminatórias nunca me permitiriam obter um emprego como matemático na União Soviética.

No entanto, havia uma surpresa reservada: meus primeiros artigos a respeito de matemática foram contrabandeados para fora do país e ficaram conhecidos, e recebi um convite para me tornar professor visitante na Universidade de Harvard aos 21 anos. De modo milagroso, na União Soviética, a perestroika simultaneamente abriu a cortina de ferro, e os cidadãos tiveram permissão de viajar para o exterior. Então, ali estava eu, professor de Harvard sem diploma de doutorado, invadindo o sistema mais uma vez. Continuei em minha trajetória acadêmica, o que me levou a pesquisar as fronteiras do Programa de Langlands e me permitiu participar de alguns dos avanços mais importantes na área durante os últimos vinte anos. A seguir, descreverei resultados espetaculares obtidos por cientistas brilhantes, e também o que aconteceu nos bastidores.

Este livro também trata do amor. Certo dia, tive a visão de um matemático descobrindo a "fórmula do amor", e isso se tornou a premissa de um filme, *Rites of Love and Math,* o qual comentarei posteriormente no livro, Quando exibo o filme, alguém sempre pergunta: "Existe realmente uma fórmula do amor?" Minha resposta: "Toda fórmula que descobrimos é uma fórmula do amor."

A matemática é uma fonte de conhecimento atemporal e profunda, que alcança o coração de toda matéria e nos une através de culturas, continentes e séculos. Meu sonho é que todos nós sejamos capazes de ver, apreciar e admirar a beleza mágica e a harmonia refinada dessas ideias, fórmulas e equações, pois isso dará muito mais significado ao nosso amor mútuo e ao amor pelo mundo.

Um guia para o leitor

Neste livro, esforcei-me ao máximo para apresentar os conceitos matemáticos da maneira mais elementar e intuitiva. No entanto, entendo que algumas partes são um tanto mais pesadas em relação à matemática (em particular, trechos dos capítulos 8, 14, 15 e 17). É perfeitamente possível ignorar as partes que parecerem confusas ou enfadonhas numa primeira leitura (isso é o que frequentemente faço). Ao voltar mais tarde a elas, dotado do conhecimento recém-adquirido, você talvez ache o material mais fácil. No entanto, isso geralmente não é necessário para você ser capaz de acompanhar o que vem em seguida.

Talvez, um ponto importante seja que é perfeitamente normal algo não estar claro. É assim que me sinto 90% do tempo em que trabalho com matemática, então, bem-vindo ao meu mundo! Esse sentimento de confusão (e até frustração, em alguns momentos) é uma parte essencial de ser um matemático. Mas olhe pelo lado bom: o quão tediosa seria a vida se tudo pudesse ser entendido com pouco esforço! O que torna a matemática tão excitante é o nosso desejo ardente de superar essa confusão, entendê-la, mergulhar no desconhecido. E o sentimento de triunfo pessoal quando entendemos algo vale a pena.

Meu foco neste livro é o cenário mais amplo e as conexões lógicas entre diferentes conceitos e ramos matemáticos, e não os detalhes técnicos. Uma discussão mais profunda foi deixada para as notas finais, que também contêm referências e sugestões de leituras. No entanto, apesar de as notas poderem ampliar seu entendimento, elas podem seguramente ser puladas (pelo menos, numa primeira leitura do livro).

Tentei minimizar o uso de fórmulas, optando, sempre que possível, por explicações verbais. Sinta-se livre para pular as poucas fórmulas que aparecem.

Um aviso sobre a terminologia matemática: enquanto escrevia este livro, descobri, para minha surpresa, que alguns termos usados por matemáticos de uma forma específica significam algo completamente diferente para leigos. Alguns exemplos são correspondência, representação, composição, loop, variedade e teoria. Ao detectar um caso assim, incluí uma explicação. E, ainda, sempre que possível, mudei termos matemáticos obscuros para outros com significados mais claros (por exemplo, escrevi “relação de Langlands”, em vez de “correspondência de Langlands”). Você talvez ache útil consultar o glossário e o índice remissivo sempre que não entender uma palavra.

Examine meu site - http://edwardfrenkel.com - para atualizações e materiais de apoio, e me envie um e-mail para compartilhar suas ideias sobre o livro (meu e-mail pode ser encontrado no site). Sua opinião será muito apreciada.

Capítulo 1

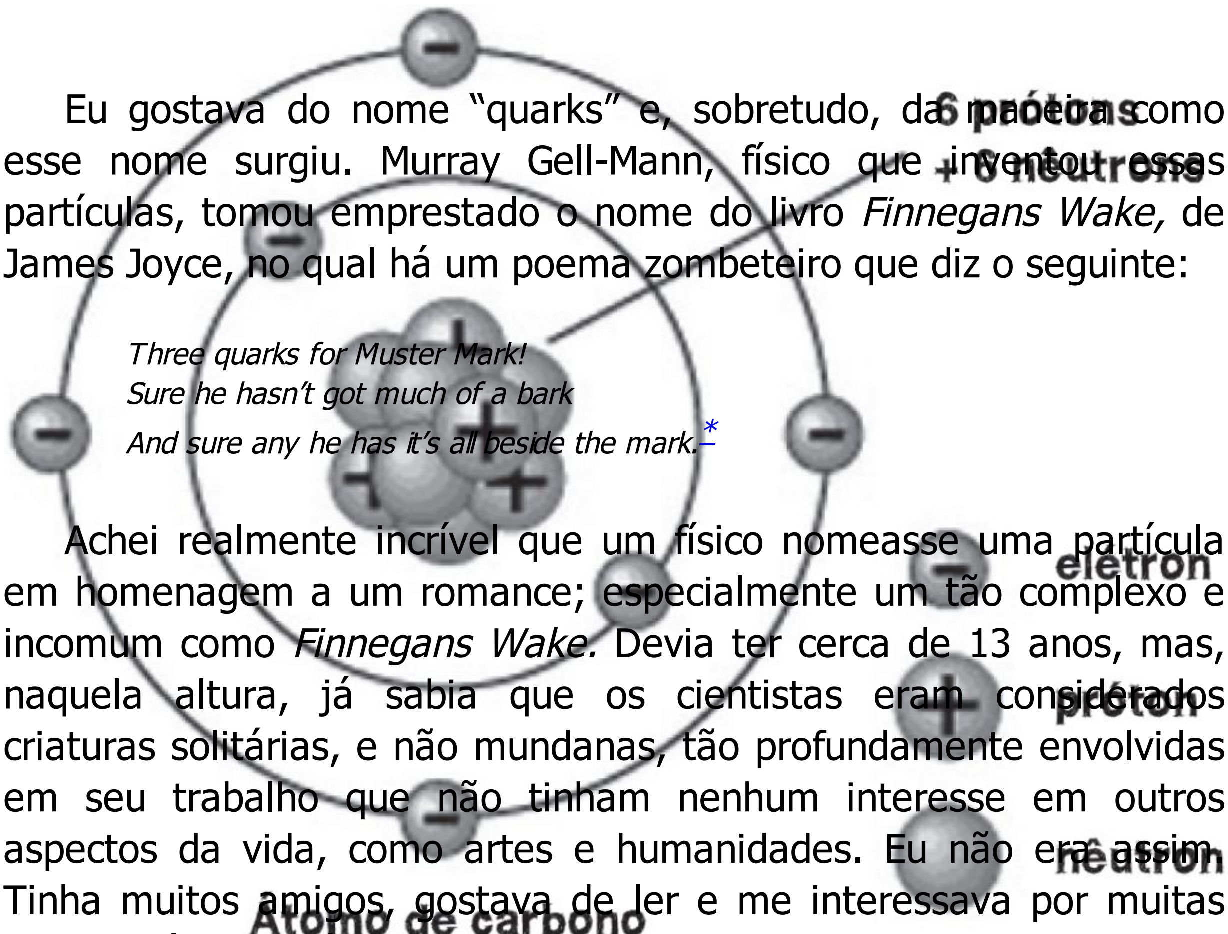
Um animal misterioso

Como alguém se torna um matemático? Isso pode acontecer de diversas maneiras. Vou contar como ocorreu comigo.

Talvez você fique surpreso, mas eu odiava matemática quando estava na escola. Bem, "odiava" talvez seja uma palavra muito forte. Digamos simplesmente que não gostava, achava maçante. Conseguia fazer minha lição de casa, mas não entendia por que estava fazendo. O material que discutíamos na aula parecia inútil, irrelevante. E eu estava convencido de que não havia mais nada na matemática além do que estudamos na escola. O que realmente me empolgava era a física; sobretudo, física quântica. Devorava todos os livros de divulgação científica sobre o assunto que conseguia. Cresci na Rússia, onde essas publicações eram fáceis de achar.

Estava fascinando com o mundo quântico. Desde tempos imemoriais, os cientistas e os filósofos sonharam em descrever a natureza fundamental do universo; alguns até formularam a hipótese de que toda matéria consiste de peças minúsculas denominadas átomos. A existência dos átomos foi provada no início do século XX, mas, aproximadamente na mesma época, os cientistas descobriram que cada átomo podia ser dividido ainda mais. Foi constatado que cada átomo consiste de um núcleo no centro e elétrons orbitando em torno dele. O núcleo, por sua vez, consiste de prótons e nêutrons, como exibido na figura abaixo.[1]

E quanto aos prótons e os nêutrons? Os livros de divulgação científica que estava lendo diziam que são constituídos de partículas elementares denominadas “quarks”.



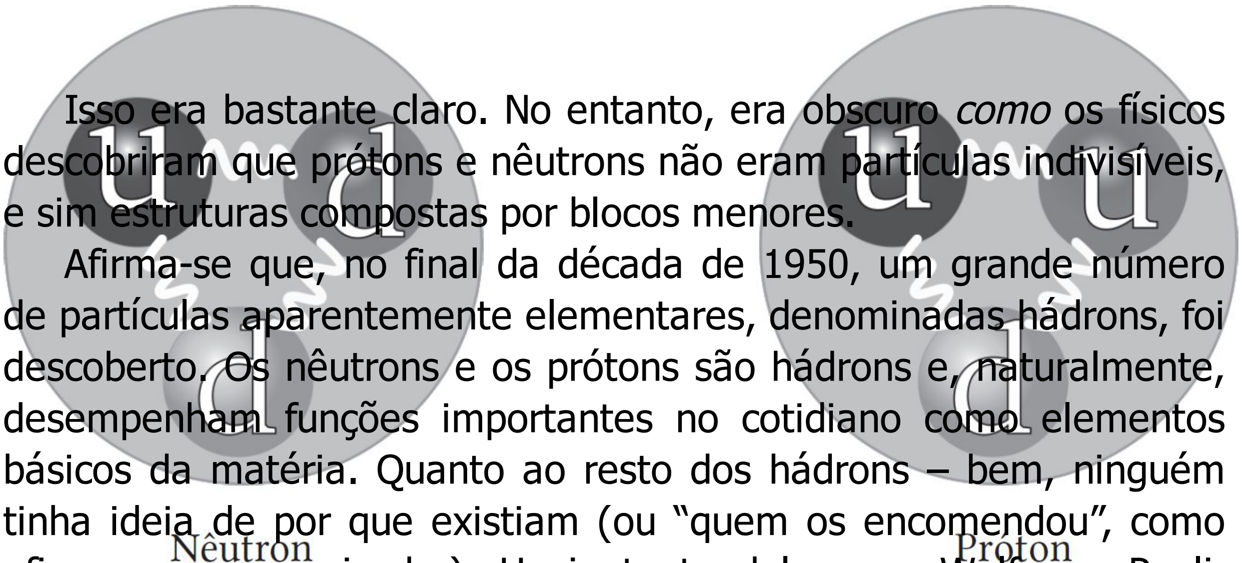
Eu gostava do nome “quarks” e, sobretudo, da maneira como esse nome surgiu. Murray Gell-Mann, físico que inventou essas partículas, tomou emprestado o nome do livro *Finnegans Wake,* de James Joyce, no qual há um poema zombeteiro que diz o seguinte:

Three quarks for Muster Mark!
Sure he hasn’t got much of a bark
And sure any he has it’s all beside the mark.[*]

Achei realmente incrível que um físico nomeasse uma partícula em homenagem a um romance; especialmente um tão complexo e incomum como *Finnegans Wake.* Devia ter cerca de 13 anos, mas, naquela altura, já sabia que os cientistas eram considerados criaturas solitárias, e não mundanas, tão profundamente envolvidas em seu trabalho que não tinham nenhum interesse em outros aspectos da vida, como artes e humanidades. Eu não era assim. Tinha muitos amigos, gostava de ler e me interessava por muitas coisas além de ciência. Gostava de jogar futebol e passava muitas horas disputando partidas com os meus amigos. Nesta época, descobri os quadros impressionistas (comecei lendo um livro enorme a respeito do Impressionismo, que encontrei na biblioteca dos meus pais). Van Gogh era meu pintor favorito. Encantado com suas obras, até tentei pintar. Na realidade, todos esses interesses me fizeram duvidar se estava realmente destinado a ser um cientista. Assim, quando descobri que Gell-Mann, grande físico, ganhador do prémio

Nobel, tinha tantos interesses (não só literatura, mas também linguística, arqueologia, entre outros), fiquei muito feliz.

De acordo com Gell-Mann, há dois tipos diferentes de quarks, "up" e "down", e misturas distintas entre eles dão aos nêutrons e prótons suas características. Um nêutron é constituído de dois quarks down e um quark up, e um próton é constituído de dois quark up e um quark down, como exposto nas figuras.[2]



Isso era bastante claro. No entanto, era obscuro *como* os físicos descobriram que prótons e nêutrons não eram partículas indivisíveis, e sim estruturas compostas por blocos menores.

Afirma-se que, no final da década de 1950, um grande número de partículas aparentemente elementares, denominadas hádrons, foi descoberto. Os nêutrons e os prótons são hádrons e, naturalmente, desempenham funções importantes no cotidiano como elementos básicos da matéria. Quanto ao resto dos hádrons – bem, ninguém tinha ideia de por que existiam (ou "quem os encomendou", como afirmou um pesquisador). Havia tanto deles que Wolfgang Pauli, físico muito influente, brincou dizendo que a física estava se transformando em botânica. Os físicos precisavam desesperadamente dominar os hádrons, para descobrir os princípios subjacentes que determinariam seu comportamento e explicariam sua insana proliferação.

De forma independente, Gell-Mann e Yuval Ne'eman propuseram um novo sistema de classificação. Os dois mostraram que os hádrons podem ser divididos naturalmente em famílias pequenas, cada uma com oito ou dez partículas. Eles as denominaram octetos e decupletos. As partículas no interior de cada uma das famílias apresentavam propriedades similares.

Nos livros de divulgação científica que estava lendo na ocasião, encontrava diagramas de octeto como este:

Nesse caso, o próton está marcado com a letra *p*; o nêutron, com a *n*; e existem seis outras partículas com nomes estranhos marcados com letras gregas.

Mas por que 8 e 10, e não 7 e 11, por exemplo? Não consegui achar uma explicação coerente nos livros que estava lendo. Mencionavam uma ideia misteriosa de Gell-Mann denominada “via óctupla” (fazendo referência ao “Nobre Caminho Óctuplo”, de Buda). Mas nunca tentaram explicar o que era isso.

Essa falta de explicação me deixou muito insatisfeito. As partes principais da história permaneciam obscuras. Queria desvendar esse mistério, mas não sabia como.

Por um golpe de sorte, tive a ajuda de um amigo da família. Cresci em Kolomna, pequena cidade industrial com 150 mil habitantes, que ficava a cerca de 110 quilômetros de Moscou, ou a pouco mais de duas horas de trem. Meus pais trabalhavam como engenheiros numa grande indústria de máquinas pesadas. Kolomna é uma cidade antiga, fundada em 1177 (apenas trinta anos após a fundação de Moscou), situada na interseção de dois rios. Há ainda algumas belas igrejas e uma muralha para atestar seu passado célebre. Mas a cidade não é exatamente um centro educacional ou intelectual. Tinha apenas uma pequena faculdade de pedagogia. No entanto, um dos professores, um matemático chamado Evgeny Evgenievich Petrov, era um velho amigo dos meus pais. E, certo dia, após muito tempo sem se verem, minha mãe o encontrou na rua, e os dois começaram a conversar. Ela gostava de falar de mim para os seus amigos, e, assim, fui mencionado na conversa. Ao escutar que eu estava interessado em ciências, Evgeny Evgenievich disse: “Quero conhecê-lo. Tentarei convertê-lo para a matemática.”

– Ah, ele não gosta de matemática – disse minha mãe. – Meu filho acha chato. Ele quer estudar física quântica.

– Não se preocupe. Acho que sei como vou conseguir fazê-lo mudar de ideia – respondeu Evgeny Evgenievich.

Um encontro foi marcado. Não fiquei muito entusiasmado, mas fui vê-lo em seu escritório.

Eu tinha quase 15 anos e estava terminando o penúltimo ano do ensino médio. (Era mais novo que meus colegas de classe, pois tinha pulado o sexto ano.) Na época, com pouco mais de 40 anos, Evgeny Evgenievich era simpático e modesto. De óculos e com uma barba rala, era exatamente como eu imaginava um matemático, mas havia algo cativante na contemplação interrogativa de seus grandes olhos. Eles exibiam curiosidade ilimitada a respeito de absolutamente tudo.

Acabou que Evgeny Evgenievich tinha de fato um plano inteligente de como me converter para a matemática. Assim que entrei em seu escritório, ele me perguntou:

– Disseram-me que você gosta de física quântica. Você ouviu falar da via óctupla de Gell-Mann e do modelo de quarks?

– Sim, li a respeito disso em diversos livros.

– Mas você sabe qual foi a base para esse modelo? Como ele chegou a essas ideias?

– Olha…

– Você ouviu falar acerca do grupo *SU* (3)?

– *SU* o quê?

– Se você não sabe o que é o grupo *SU* (3), como pode entender o modelo de quarks?

Ele pegou alguns livros da estante, abriu-os e me mostrou páginas de fórmulas. Pude ver os familiares diagramas de octeto, como o exposto acima, mas eles não eram apenas belas figuras, eram também parte do que parecia uma explicação coerente e detalhada.

Ainda que essas fórmulas não tivessem nem pé nem cabeça para mim, ficou claro de imediato que continham as respostas que estivera procurando. Foi um momento de epifania. Fiquei fascinado com o que estava vendo e ouvindo; tocado por algo que jamais vivenciara antes; incapaz de expressar em palavras, mas sentindo a energia, o entusiasmo que experimentamos quando escutamos uma obra musical ou vemos uma pintura que provoca uma impressão inesquecível. Tudo o que consegui pensar foi: *Uau!*

– Provavelmente, você acha que matemática é o que lhe ensinam na escola – afirmou Evgeny Evgenievich. Ele fez um gesto negativo com a cabeça. – Não – disse e, em seguida, apontou para as fórmulas no livro. – A matemática trata disso. E, se você realmente quiser entender física quântica, é por onde precisará começar. Gell-Mann previu os quarks usando uma bela teoria matemática. Na realidade, foi uma descoberta matemática.

– Mas como eu começo a entender essa matéria?

Parecia um tanto assustador.

– Não se preocupe. A primeira coisa que você precisa aprender é o conceito de grupo de simetrias. Essa é a ideia principal. Uma grande parte da matemática, e também da física teórica, baseia-se nela. Eis aqui alguns livros que quero dar a você. Comece lendo-os e sublinhe as frases que não entender. Podemos nos reunir aqui semanalmente e conversar a respeito disso.

Evgeny Evgenievich me deu um livro sobre grupos de simetrias e também dois outros a respeito de tópicos distintos: os assim chamados números p-ádicos (sistema numérico radicalmente diferente dos números a que estamos acostumados) e topologia (o estudo das propriedades mais fundamentais das formas geométricas). Ele tinha um gosto impecável: encontrou uma combinação perfeita de tópicos, que me permitiriam observar esse animal misterioso – a matemática – de lados distintos, e ficar excitado a respeito dele.

Na escola, estudamos coisas como equações de segundo grau, um pouco de cálculo, alguma geometria euclidiana básica e trigonometria. Eu tinha suposto que toda a matemática girava em torno desses assuntos, que talvez os problemas ficassem mais complicados, mas permanecessem dentro do mesmo arcabouço geral com o qual estava familiarizado. No entanto, os livros que

Evgeny Evgenievich me deu continham vislumbres de um mundo totalmente diferente, cuja existência jamais poderia imaginar.

Converti-me num instante.

*Três quarks para Muster Mark / Não que ele chegue bem a ladrar / E o pouco que ladra não seja de impressionar.

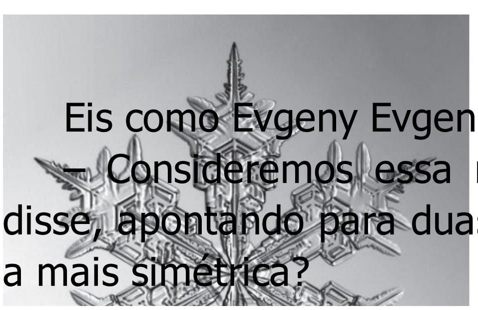
Capítulo 2

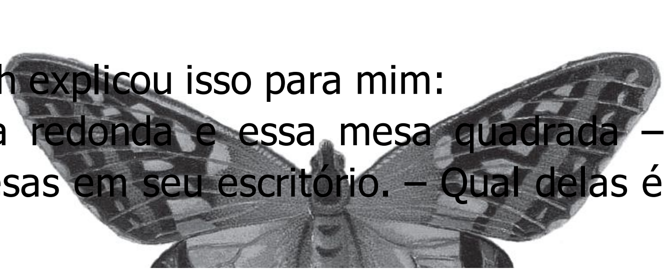
A essência da simetria

Na cabeça da maioria das pessoas, a matemática é inteiramente uma questão de números. Elas imaginam os matemáticos como pessoas que passam os dias analisando números: números grandes e números cada vez maiores, todos com nomes exóticos. Eu imaginava o mesmo; ao menos até Evgeny Evgenievich me apresentar os conceitos e as ideias da matemática moderna. Um deles acabou se revelando a chave para a descoberta dos quarks: o conceito de simetria.

O que é simetria? Todos nós temos um entendimento intuitivo disso: sabemos quando vemos. Quando peço para as pessoas me darem um exemplo de objeto simétrico, elas indicam borboletas, flocos de neve ou o corpo humano.

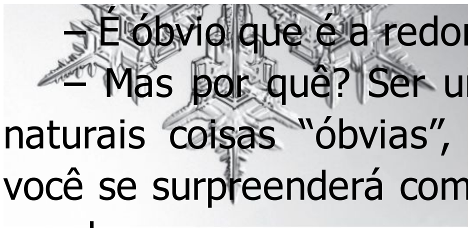
Mas se lhes pergunto o que querem dizer quando afirmam que um objeto é simétrico, as pessoas hesitam.

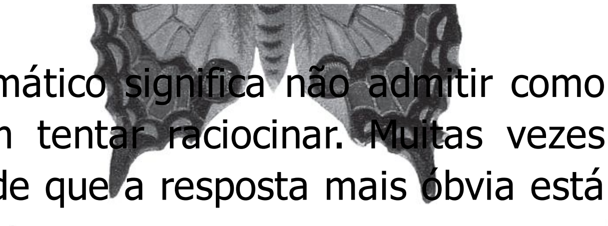




Eis como Evgeny Evgenievich explicou isso para mim:

– Consideremos essa mesa redonda e essa mesa quadrada – disse, apontando para duas mesas em seu escritório. – Qual delas é a mais simétrica?





– É óbvio que é a redonda.

– Mas por quê? Ser um matemático significa não admitir como naturais coisas “óbvias”, mas sim tentar raciocinar. Muitas vezes você se surpreenderá com o fato de que a resposta mais óbvia está errada.

Foto de K. G. Libbrecht

Percebendo-me confuso, Evgeny Evgenievich deu-me uma dica:

– Qual é a propriedade da mesa redonda que a torna mais simétrica? Pensei nisso por um tempo e, então, afirmei:

– Acho que a simetria de um objeto tem a ver com ele manter a forma e a posição inalteradas mesmo quando aplicamos mudanças nele.

Evgeny Evgenievich fez que sim com a cabeça.

– De fato. Consideremos todas as transformações possíveis das duas mesas que preservam suas formas e suas posições – afirmou. – No caso da mesa redonda…

Eu o interrompi:

– Qualquer rotação em torno do ponto central tem esse efeito. Teremos de volta a mesma mesa posicionada da mesma maneira. No entanto, se aplicarmos uma rotação arbitrária na mesa quadrada, normalmente teremos a mesa posicionada de maneira diferente. Apenas rotações de 90 graus e seus múltiplos a preservam.

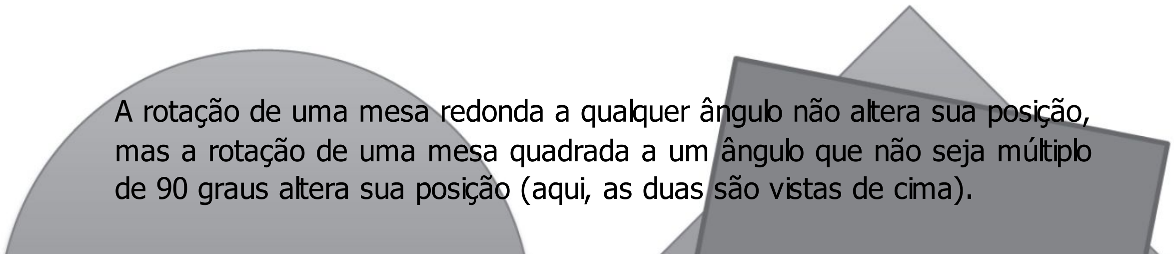
– Exatamente! Se você sair do meu escritório por um minuto, e eu girar a mesa redonda em qualquer ângulo, você não notará a diferença. Contudo, se eu fizer o mesmo com a mesa quadrada, você perceberá uma diferença, a menos que eu a gire a 90, 180 ou 270 graus.

Evgeny Evgenievich prosseguiu:

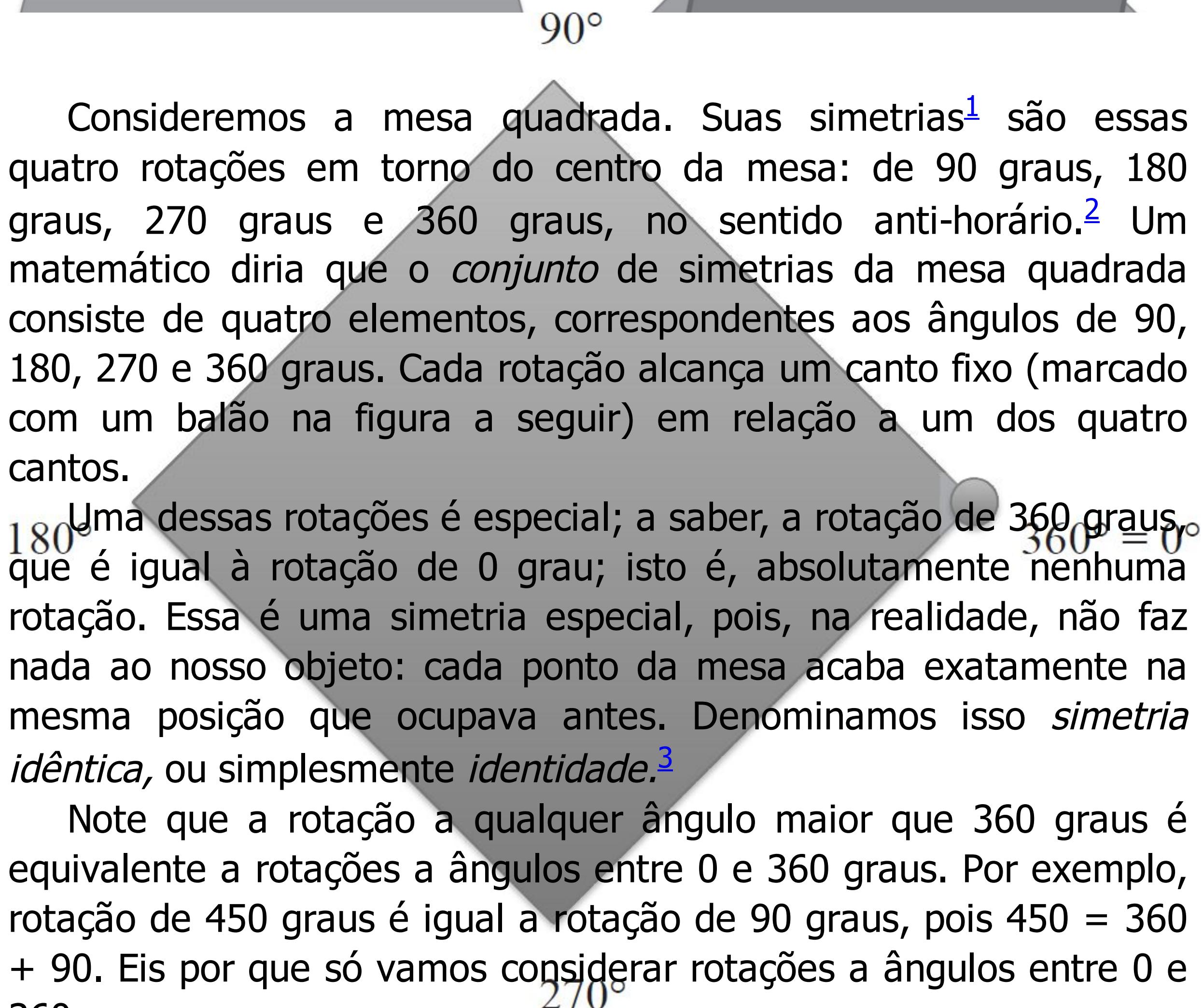
– Essas transformações são denominadas simetrias. Assim, você observa que a mesa quadrada possui apenas quatro simetrias, enquanto a mesa redonda dispõe de muitas mais; na realidade, possui uma infinidade de simetrias. Eis por que dizemos que a mesa redonda é mais simétrica.

Aquilo fazia muito sentido.

– Essa é uma observação bastante objetiva – continuou Evgeny Evgenievich. - Você não tem de ser matemático para enxergar isso. No entanto, se você for um matemático, você formulará a próxima pergunta: quais são *todas* as possíveis simetrias de um determinado objeto?



A rotação de uma mesa redonda a qualquer ângulo não altera sua posição, mas a rotação de uma mesa quadrada a um ângulo que não seja múltiplo de 90 graus altera sua posição (aqui, as duas são vistas de cima).



Consideremos a mesa quadrada. Suas simetrias[1] são essas quatro rotações em torno do centro da mesa: de 90 graus, 180 graus, 270 graus e 360 graus, no sentido anti-horário.[2] Um matemático diria que o *conjunto* de simetrias da mesa quadrada consiste de quatro elementos, correspondentes aos ângulos de 90, 180, 270 e 360 graus. Cada rotação alcança um canto fixo (marcado com um balão na figura a seguir) em relação a um dos quatro cantos.

Uma dessas rotações é especial; a saber, a rotação de 360 graus, que é igual à rotação de 0 grau; isto é, absolutamente nenhuma rotação. Essa é uma simetria especial, pois, na realidade, não faz nada ao nosso objeto: cada ponto da mesa acaba exatamente na mesma posição que ocupava antes. Denominamos isso *simetria idêntica,* ou simplesmente *identidade.*[3]

Note que a rotação a qualquer ângulo maior que 360 graus é equivalente a rotações a ângulos entre 0 e 360 graus. Por exemplo, rotação de 450 graus é igual a rotação de 90 graus, pois 450 = 360 + 90. Eis por que só vamos considerar rotações a ângulos entre 0 e 360 graus.

Aqui chegamos à observação fundamental: se aplicarmos duas rotações com base na lista (90°, 180°, 270°, 360°), uma após a outra, obteremos outra rotação com base na mesma lista. Chamamos essa nova simetria de *composição* das duas.

Naturalmente, isso é óbvio: cada uma das duas simetrias preserva a mesa. Portanto, a composição das duas simetrias também a preserva. Dessa maneira, essa composição também tem de ser uma simetria. Por exemplo, se girarmos a mesa em 90 graus e, em seguida, em 180 graus, o resultado líquido é a rotação de 270 graus.

Vejamos o que acontece com a mesa de acordo com essas simetrias. Numa rotação no sentido anti-horário de 90 graus, o canto direito da mesa (aquele marcado com o balão na figura anterior) irá para o canto superior. Em seguida, aplicamos a rotação de 180 graus; então, o canto superior irá para o canto inferior. O resultado líquido será que o canto direito acabará no canto inferior. Esse é o resultado da rotação no sentido anti-horário de 270 graus.

Eis mais um exemplo:

$$90° + 270° = 0°.$$

Numa rotação de 90 graus e, em seguida, de 270 graus, obtemos a rotação de 360 graus. No entanto, o efeito da rotação de 360 graus é igual ao da rotação de 0 grau, como discutimos acima – essa é a "simetria de identidade".

Em outras palavras, a segunda rotação de 270 graus desfaz a rotação inicial de 90 graus. De fato, essa é uma propriedade importante: qualquer simetria pode ser *desfeita*; isto é, para qualquer simetria *S,* existe outra simetria *S'*, de modo que sua composição é a simetria identidade. Esse *S'* é denominado o *inverso* da simetria *S*. Assim, observamos que a rotação de 270 graus é o inverso da rotação de 90 graus. Da mesma forma, o inverso da rotação de 180 graus é a mesma rotação de 180 graus.

Nesse momento, percebemos que aquilo que parece uma coleção simples de simetrias da mesa quadrada – as quatro rotações (90 graus, 180 graus, 270 graus, 0 grau) – possui realmente muita estrutura interior, ou regras de como os membros do conjunto podem interagir.

Em primeiro lugar, podemos compor quaisquer duas simetrias (isto é, aplicá-las uma após a outra).

Em segundo lugar, há uma simetria especial: a identidade. Em nosso exemplo, é a rotação de 0 grau. Se a compusermos com qualquer outra simetria, obteremos de volta a mesma simetria. Por exemplo,

$$90° + 0° = 90°, 180° + 0° = 180°, \text{etc.}$$

Em terceiro lugar, para qualquer simetria *S*, há a simetria inversa *S'*, de modo que a composição de *S* e *S'* é a identidade.

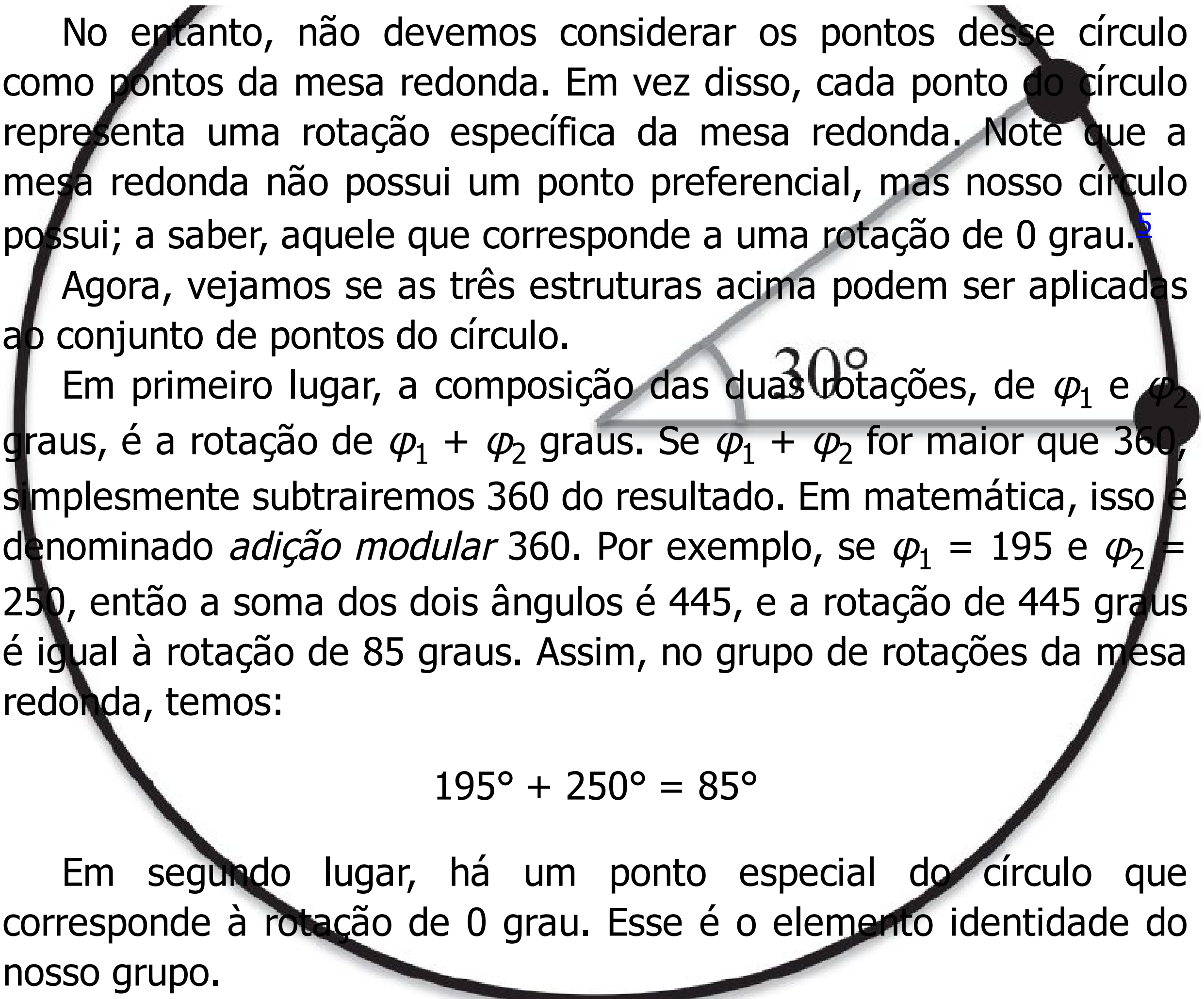
E, neste momento, chegamos ao ponto principal: o conjunto de rotações, junto com essas três estruturas, abrange um exemplo do que os matemáticos denominam um *grupo.*

As simetrias de qualquer outro objeto também constituem um grupo, que, em geral, possui mais elementos - possivelmente, uma infinidade.[4]

Vejamos como isso funciona no caso da mesa redonda. Agora que conquistamos alguma experiência, podemos observar de imediato que o conjunto de todas as simetrias da mesa redonda é simplesmente o conjunto de todas as rotações possíveis (não apenas as múltiplas de 90 graus), e podemos visualizar isso como o conjunto de todos os pontos de um círculo.

Cada ponto do círculo corresponde a um ângulo entre 0 e 360 graus, representando a rotação da mesa redonda segundo esse ângulo, no sentido anti-horário. Em particular, há um ponto especial correspondente à rotação de 0 grau. Está marcado na figura abaixo, junto com outro ponto, que corresponde à rotação de 30 graus.

No entanto, não devemos considerar os pontos desse círculo como pontos da mesa redonda. Em vez disso, cada ponto do círculo representa uma rotação específica da mesa redonda. Note que a mesa redonda não possui um ponto preferencial, mas nosso círculo possui; a saber, aquele que corresponde a uma rotação de 0 grau.[5]



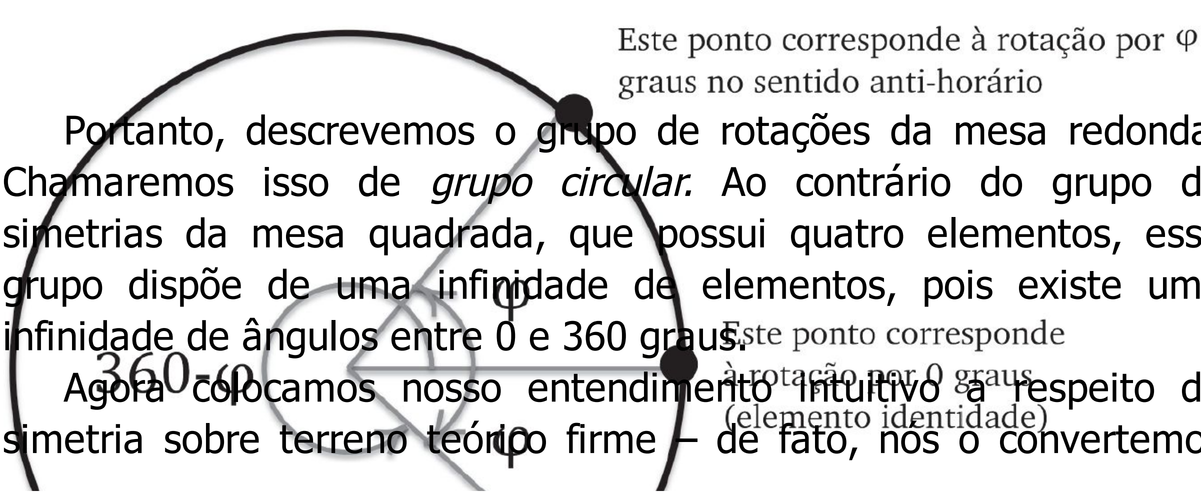
Agora, vejamos se as três estruturas acima podem ser aplicadas ao conjunto de pontos do círculo.

Em primeiro lugar, a composição das duas rotações, de φ_1 e φ_2 graus, é a rotação de $\varphi_1 + \varphi_2$ graus. Se $\varphi_1 + \varphi_2$ for maior que 360, simplesmente subtrairemos 360 do resultado. Em matemática, isso é denominado *adição modular* 360. Por exemplo, se $\varphi_1 = 195$ e $\varphi_2 = 250$, então a soma dos dois ângulos é 445, e a rotação de 445 graus é igual à rotação de 85 graus. Assim, no grupo de rotações da mesa redonda, temos:

$$195° + 250° = 85°$$

Em segundo lugar, há um ponto especial do círculo que corresponde à rotação de 0 grau. Esse é o elemento identidade do nosso grupo.

Em terceiro lugar, o inverso da rotação no sentido anti-horário de φ graus é a rotação no sentido anti-horário de $(360 — \varphi)$ graus, ou, de modo equivalente, a rotação no sentido horário de φ graus (veja a figura).



Portanto, descrevemos o grupo de rotações da mesa redonda. Chamaremos isso de *grupo circular.* Ao contrário do grupo de simetrias da mesa quadrada, que possui quatro elementos, esse grupo dispõe de uma infinidade de elementos, pois existe uma infinidade de ângulos entre 0 e 360 graus.

Agora colocamos nosso entendimento intuitivo a respeito da simetria sobre terreno teórico firme – de fato, nós o convertemos

Este ponto corresponde à rotação por φ graus, no sentido horário

num conceito matemático. Em primeiro lugar, postulamos que a simetria de um dado objeto é uma transformação que preserva o mesmo e suas propriedades. Em seguida, demos um passo decisivo: enfocamos o conjunto de todas as simetrias do objeto. No caso de urna mesa quadrada, esse conjunto consiste de quatro elementos (rotação segundo múltiplos de 90 graus); no caso de uma mesa redonda, é um conjunto infinito (de todos os pontos do círculo). Finalmente, descrevemos as estruturas puras que esse conjunto de simetrias sempre possui: quaisquer duas simetrias podem ser compostas para produzir outra simetria; dentro disto, existe a simetria idêntica; e, para cada simetria idêntica, existe o seu inverso (a composição de simetrias também satisfaz a propriedade de associatividade descrita na nota final 4.) Dessa maneira, alcançamos o conceito matemático de grupo.

Um grupo de simetrias é um objeto abstrato, bastante diferente do objeto concreto com o qual começamos. Não conseguimos tocar ou segurar o conjunto de simetrias de uma mesa (ao contrário da própriamesa), mas podemos imaginá-lo, desenhar seus elementos, estudá-lo, discutir a respeito dele. Contudo, cada elemento desse conjunto abstrato tem um significado concreto: representa uma transformação específica de um objeto concreto, sua simetria.

A matemática envolve o estudo desses objetos e conceitos abstratos.

A experiência revela que a simetria é um principio básico para as leis da natureza. Por exemplo, um floco de neve apresenta uma forma hexagonal perfeita, pois este é o estado de menor energia em que moléculas de água cristalizadas são forçadas. As simetrias do floco de neve são rotações segundo múltiplos de 60 graus; isto é, 60, 120, 180, 240, 300 e 360 (que é igual a 0 grau). Além disso, podemos "virar" o floco de neve ao longo de cada um dos seis eixos correspondentes a esses ângulos. Todas essas rotações e essas viradas preservam a forma e a posição do floco de neve, e, portanto, são suas simetrias.*

No caso de uma borboleta, ao virá-la, ela fica de ponta-cabeça. Como tem pernas, a virada não é, a rigor, uma simetria da borboleta. Quando dizemos que a borboleta é simétrica, estamos falando sobre uma versão idealizada dela, na qual sua frente e suas costas são exatamente as mesmas (ao contrário das de uma borboleta real). Por outro lado, a virada que troca as asas esquerda e direita se torna uma simetria (também podemos imaginar a troca das asas sem virar a borboleta de ponta-cabeça).

Isso traz à tona um ponto importante: na natureza, há diversos objetos cujas simetrias são aproximadas. Uma mesa da vida real não é perfeitamente redonda ou perfeitamente quadrada; uma borboleta viva possui uma assimetria entre sua frente e suas costas; e um corpo humano não é plenamente simétrico. No entanto, mesmo nesses casos, acaba se revelando útil considerar suas versões ou modelos abstratos idealizados – uma mesa perfeitamente redonda ou uma imagem de borboleta em que não fazemos distinção entre a frente e as costas. Nós, então, analisamos as simetrias desses objetos idealizados e ajustamos quaisquer inferências que possamos fazer a partir dessa análise, para levarmos em conta a diferença entre um objeto da vida real e seu modelo.

Isso não quer dizer que não apreciamos a assimetria; apreciamos, sim, e muitas vezes encontramos beleza nela. No entanto, o ponto principal da teoria matemática da simetria não é a estética, mas sim a formulação do conceito de simetria nos termos mais gerais e, portanto, inevitavelmente mais abstratos, para que a teoria possa ser aplicada de modo unificado em diversos domínios, tais como geometria, teoria dos números, física, química, biologia etc. Depois de desenvolvermos essa teoria, também podemos falar a respeito dos mecanismos de quebra de simetria – a visualização da assimetria como emergente, se você quiser. Por exemplo, partículas elementares adquirem massa porque a assim chamada simetria de calibre a que obedecem (que será discutida no capítulo 16) é quebrada. Isso é facilitado pelo bóson de Higgs, partícula elusiva recentemente descoberta no Grande Colisor de Há-drons, maior acelerador de partículas do mundo, situado próximo de Genebra.[6] O estudo desses mecanismos de quebra de simetria produz *insights* inestimáveis sobre o comportamento dos elementos fundamentais da natureza.

Gostaria de destacar algumas qualidades básicas da teoria abstrata da simetria, pois é uma boa ilustração da importância da matemática.

A primeira qualidade é a *universalidade.* O grupo circular não é só o grupo de simetrias de uma mesa redonda, mas também de todos os outros objetos redondos, tais como um copo, uma garrafa, uma coluna etc. De fato, afirmar que um dado objeto é redondo é igual a dizer que seu grupo de simetrias é o grupo circular. Essa é uma afirmação poderosa: percebemos que podemos descrever um atributo importante de um objeto ("ser redondo") descrevendo seu grupo de simetrias (o círculo). Da mesma forma, "ser quadrado" significa que o grupo de simetrias é o grupo de quatro elementos descritos acima. Em outras palavras, o mesmo objeto matemático abstrato (como o grupo circular) atende a inúmeros objetos concretos distintos, e indica propriedades universais que todos têm em comum (como a circularidade).[7]

A segunda é a *objetividade.* O conceito de um grupo, por exemplo, independe de nossa interpretação. Significa a mesma coisa para qualquer um que o aprende. Naturalmente, a fim de entendê-lo, a pessoa tem de saber a linguagem em que está expresso; isto é, a linguagem matemática. No entanto, qualquer um pode aprender essa linguagem. Da mesma forma, se você quiser entender o significado da frase de René Descartes *"Je pense, done je suis"* ("Penso, logo existo"), você precisa saber francês (no mínimo, as palavras que são usadas nessa frase); porém, qualquer um pode aprender a língua. Contudo, no caso dessa última frase, depois de a entendermos, distintas interpretações a respeito dela são possíveis. Além disso, diferentes pessoas podem concordar ou discordar da validade de uma interpretação específica. Em contraste, o significado de um enunciado matemático logicamente consistente não está sujeito à interpretação.[8] Além disso, sua verdade também é objetiva (em geral, a verdade de um enunciado específico pode depender do sistema de axiomas ao qual pertence. Contudo, mesmo assim, essa dependência relativa dos axiomas também é objetiva). Por exemplo, o enunciado "o grupo de simetrias de uma mesa redonda é um círculo" é verdadeiro para qualquer pessoa, em qualquer lugar, em qualquer tempo. Em outras palavras, as verdades matemáticas são as verdades necessárias. No capítulo 18, discutiremos mais sobre isso.

A terceira qualidade é a *resistência.* Não há muitas dúvidas de que o Teorema de Pitágoras significa o mesmo para os antigos gregos que para nós hoje em dia, e há razões de sobra para acreditar que significará a mesma coisa para qualquer um no futuro. Da mesma forma, todos os enunciados matemáticos verdadeiros de que falaremos neste livro permanecerão válidos para sempre.

O fato de que esse conhecimento objetivo e resistente exista (e, além do mais, pertença a todos nós) é não menos que um milagre. Sugere que os conceitos matemáticos existem num mundo à parte dos mundos físico e mental – o que ocasionalmente é referido como o mundo platônico da matemática (falaremos mais a esse respeito no capítulo final). Ainda não entendemos plenamente o que é e o que condiciona a descoberta matemática. Mas é evidente que essa realidade oculta deve desempenhar um papel maior e mais amplo em nossas vidas, sobretudo com o advento das novas tecnologias de computadores e da impressão 3D.

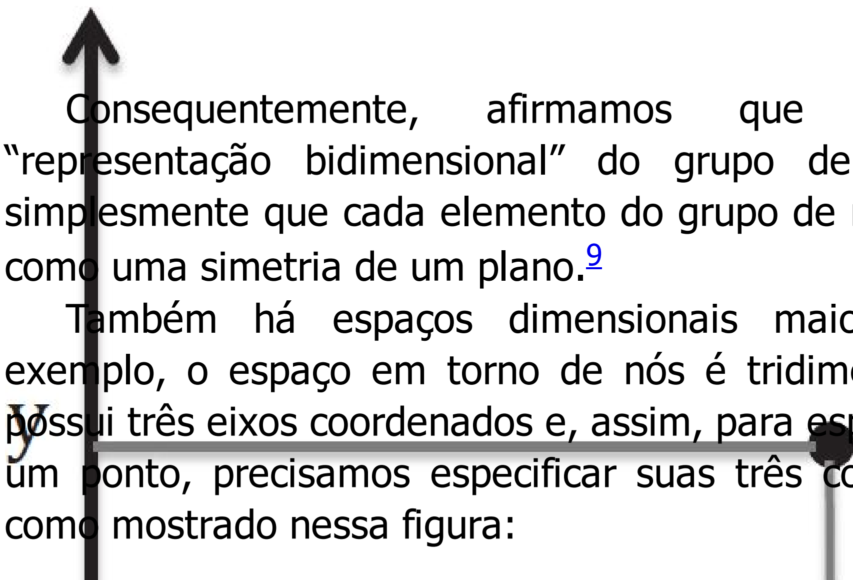
A quarta qualidade é a *aplicabilidade* da matemática no mundo físico. Por exemplo, nos últimos cinquenta anos, muito progresso foi alcançado na física quântica devido à aplicação do conceito de simetria nas partículas elementares e nas interações entre as mesmas. Desse ponto de vista, uma partícula, como um elétron ou um quark, é como uma mesa redonda ou um floco de neve, e seu comportamento é bastante determinado por suas simetrias (algumas dessas simetrias são exatas, e outras, aproximadas).

A descoberta dos quarks é um exemplo perfeito de como isso funciona. Ao ler os livros que Evgeny Evgenievich me deu, aprendi que a raiz da classificação de Gell-Mann e Ne'eman a respeito dos hádrons que discutimos no capítulo anterior é um *grupo de simetrias.* Esse grupo foi estudado previamente por matemáticos – que não previram nenhuma conexão com partículas subatômicas. O nome matemático para isso é *SU*(3). Nesse caso, S e U significam "unitário especial" (*speciaí unitary,* em inglês). Esse grupo é muito parecido em suas propriedades com o grupo de simetrias da esfera, do qual falaremos a respeito em detalhes no capítulo 10.

Os matemáticos descreveram previamente as representações do grupo *SU*(3), isto é, as maneiras distintas pelas quais ele pode ser percebido como um grupo de simetrias. Gell-Mann e Ne'eman perceberam a semelhança entre a estrutura dessas representações e os padrões dos hádrons que tinham descoberto. Eles utilizaram essa informação para classificar os hádrons.

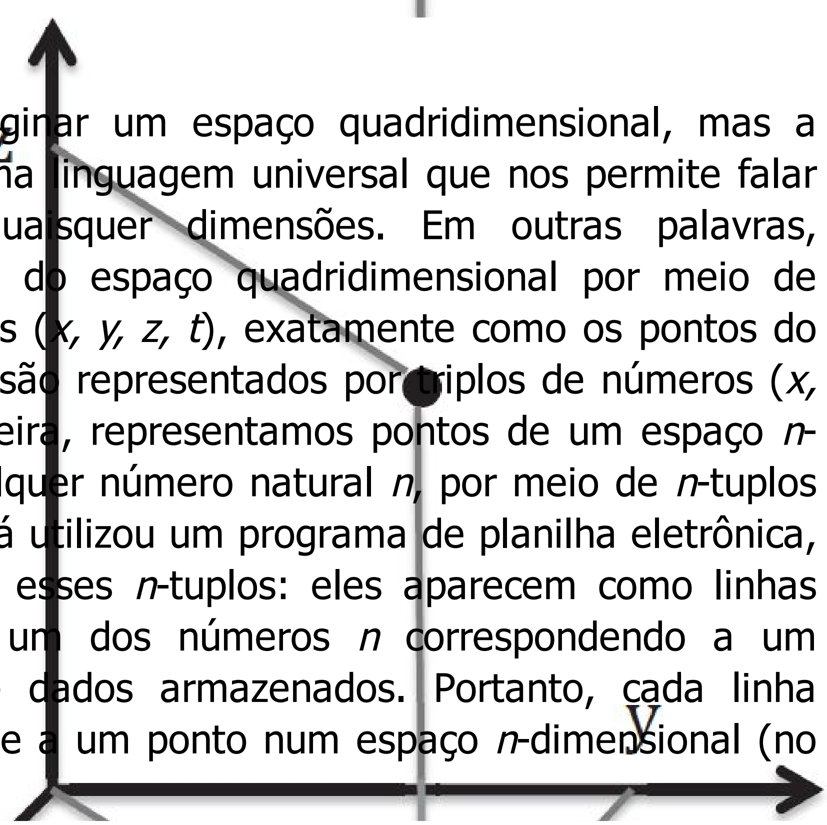
Em matemática, a palavra "representação" é utilizada de uma maneira particular, distinta do seu uso mais comum. Assim, faço uma interrupção e explico o que essa palavra significa no presente contexto. Talvez ajude se eu primeiro fornecer um exemplo. Recorde-se do grupo de rotações de uma mesa redonda discutido acima: o grupo circular. Agora imagine estender o tampo da mesa infinitamente, em todas as direções. Dessa maneira, obtemos um objeto matemático abstrato: um plano. Cada rotação do tampo da mesa, em torno de seu centro, causa uma rotação desse plano em torno do mesmo ponto. Portanto, obtemos uma regra que fixa uma simetria desse plano (uma rotação) em relação a cada elemento do grupo circular. Em outras palavras, cada elemento do grupo circular pode ser representado pela simetria do plano. Por isso, os matemáticos referem-se a esse processo como uma *representação* do grupo circular.

Dessa maneira, o plano é bidimensional porque possui dois eixos coordenados, e, portanto, cada ponto possui duas coordenadas.



Consequentemente, afirmamos que construímos uma "representação bidimensional" do grupo de rotações. Significa simplesmente que cada elemento do grupo de rotações é entendido como uma simetria de um plano.[9]

Também há espaços dimensionais maiores que dois. Por exemplo, o espaço em torno de nós é tridimensional. Quer dizer, possui três eixos coordenados e, assim, para especificar a posição de um ponto, precisamos especificar suas três coordenadas (*x, y, z*), como mostrado nessa figura:



Não podemos imaginar um espaço quadridimensional, mas a matemática nos dá uma linguagem universal que nos permite falar sobre espaços de quaisquer dimensões. Em outras palavras, representamos pontos do espaço quadridimensional por meio de quádruplos de números (*x, y, z, t*), exatamente como os pontos do espaço tridimensional são representados por triplos de números (*x, y, z*). Da mesma maneira, representamos pontos de um espaço *n*-dimensional, para qualquer número natural *n*, por meio de *n*-tuplos de números. Se você já utilizou um programa de planilha eletrônica, então você encontrou esses *n*-tuplos: eles aparecem como linhas numa planilha, cada um dos números *n* correspondendo a um atributo específico de dados armazenados. Portanto, cada linha numa planilha refere-se a um ponto num espaço *n*-dimensional (no capítulo 10, falaremos mais acerca dos espaços de diversas dimensões).

Se cada elemento de um grupo puder ser obtido de maneira consistente,[10] com uma simetria de um espaço *n*-dimensional, então dizemos que o grupo possui uma "representação *n*-dimensional".

Constata-se que um determinado grupo pode ter representações de diferentes dimensões. O motivo pelo qual as partículas elementares podem ser montadas em famílias de oito e dez partículas é que o grupo *SU*(3) é conhecido por ter representações 8-dimensional e 10-dimensional. As oito partículas de cada octeto construído por Gell- Mann e Ne'eman (como exposto no diagrama da página 22) estão em correspondência um-a-um com os oito eixos coordenados de um espaço 8-dimensional, que é uma representação de *SU*(3). O mesmo acontece em relação ao decupleto de partículas (no entanto, as partículas não podem ser montadas em famílias de, por exemplo, sete ou onze, pois os matemáticos provaram que o grupo *SU*(3) não possui representações 7 ou 11-dimensional).

Inicialmente, essa era apenas uma forma conveniente de combinar partículas com propriedades similares. No entanto, Gell-Mann foi além. Ele postulou que havia uma razão mais profunda por trás desse sistema de classificação. Disse basicamente que esse sistema funciona tão bem porque os hádrons consistem de partículas menores – às vezes, duas delas e, outras vezes, três delas – os quarks. Uma proposta parecida foi formulada de maneira independente pelo físico George Zweig (que chamou as partículas de "ases").

Era uma proposta estonteante. Não só ia contra a crença popular da época de que prótons e nêutrons e também outros hádrons eram partículas elementares indivisíveis, mas afirmava ainda que essas novas partículas deviam ter cargas elétricas, que eram frações da carga do elétron. Era uma predição surpreendente, pois ninguém tinha visto essas partículas antes. No entanto, em pouco tempo, os quarks foram descobertos experimentalmente e, como predito, tinham cargas elétricas fracionais!

O que motivou Gell-Mann e Zweig a predizerem a existência dos quarks? A teoria matemática de representações do grupo *SU*(3). Específicamente, o fato de que o grupo *SU*(3) possui duas representações 3-dimensional distintas (na realidade, esse é o motivo pelo qual há um "3" no nome desse grupo). Gell-Mann e Zweig sugeriram que essas duas representações deveriam descrever duas famílias de partículas elementares: três quarks e três antiquarks. Constata-se que as representações 8 e 10-dimensional de *SU*(3) podem ser construídas a partir de representações 3-dimensional. E isso nos dá um esquema preciso de como construir hádrons a partir de quarks – exatamente como no Lego.

Gell-Mann nomeou os três quarks: "up", "down" e "strange".[11] Um próton consiste de dois quarks up e um quark down, enquanto um nêutron consiste de dois quarks down e um quark up, como vimos nas figuras da página 21. Duas dessas partículas pertencem ao octeto exposto na figura da página 22. Outras partículas desse octeto envolvem o quark strange e também os quarks up e down. Também existem octetos que consistem de partículas compostas de um quark e um antiquark.

A descoberta dos quarks é um bom exemplo do papel supremo desempenhado pela matemática na ciência, que discutimos no prefácio. Essas partículas foram vaticinadas não com base em dados empíricos, mas com base em padrões de simetria matemática. Era uma predição puramente teórica, realizada dentro do arcabouço de uma teoria matemática sofisticada de representações do grupo *SU*(3). Os físicos levaram anos para dominar essa teoria (e, de fato, inicialmente houve alguma resistência), mas, atualmente, é o feijão com arroz da física da partícula elementar. Não só proporcionou uma classificação de hádrons, mas também levou à descoberta dos quarks, que mudou para sempre nossa compreensão da realidade física.

Imagine: uma teoria matemática aparentemente esotérica nos capacitou a chegar ao cerne dos elementos básicos da natureza. Como nao podemos nos fascinar com a harmonia mágica dessas minúsculas bolhas de matéria, não nos maravilhar com a capacidade da matemática de revelar os mecanismos internos do universo?

Afirma-se que Elsa, a mulher de Albert Einstein, ao escutar que era necessário o telescópio do Observatório Monte Wilson para determinar a forma do espaço-tempo, comentou: “Ah, meu marido fez isso no verso de um envelope velho.”

Os físicos podem precisar de máquinas caras e sofisticadas como o Grande Colisor de Hádrons, em Genebra, mas o fato surpreendente é que cientistas como Einstein e Gell-Mann utilizaram o que parece ser o conhecimento matemático mais puro e mais abstrato para revelar os segredos mais recônditos do mundo ao nosso redor.

Independentemente de quem somos e no que acreditamos, todos compartilhamos esse conhecimento. Ele nos une e dá um novo significado ao nosso amor pelo universo.

[*]Note que virar uma mesa não é uma simetria: ela ficaria de cabeça para baixo – não se esqueça de que a mesa possui pernas. Se formos considerar um quadrado ou um círculo (sem pernas), então a virada seria uma simetria autêntica. Teríamos de incluir nos grupos de simetria correspondentes.

Capítulo 3

O quinto problema

O plano de Evgeny Evgenievich funcionou perfeitamente: fui “convertido” à matemática. Estava aprendendo rapidamente, e, quanto mais fundo mergulhava na matemática, mais minha fascinação crescia, mais queria saber. Isso é o que acontece quando você se apaixona.

Comecei a me encontrar com Evgeny Evgenievich com regularidade. Ele me dava livros para ler, e nos reuníamos uma vez por semana na faculdade de pedagogia onde ele lecionava, para discutirmos o que eu havia lido. Evgeny Evgenievich jogava futebol, hóquei sobre o gelo e voleibol com frequência, mas, como muitos homens na União Soviética daquele tempo, era um fumante inveterado. Por um longo tempo, o cheiro de cigarro ficou associado na minha mente à prática da matemática.

Às vezes, nossas conversas se prolongavam até tarde da noite. Certa vez, o zelador trancou o auditório em que estávamos, pois não podia imaginar que havia alguém em seu interior numa hora tão adiantada. A concentração em nossa conversa devia ser de tal ordem que não escutamos a porta ser trancada. Felizmente, o auditório ficava no andar térreo, e conseguimos escapar dali através de uma janela.

Em 1984, cursava meu último ano no ensino médio. Tinha de decidir a qual universidade me candidataria. Moscou tinha muitas escolas, mas havia um único lugar para estudar matemática pura: a Universidade Estadual de Moscou, conhecida por sua abreviatura russa MGU (*Moskovskiy Gosudarstvenny Universitet*). Seu notório Departamento de Mecânica e Matemática, o *Mekh-Mat*, oferecia o principal curso de matemática da União Soviética.

Os exames vestibulares para as faculdades russas não são como o SAT, os exames realizados pelos estudantes norte-americanos. No *Mekh-Mat*, o exame consistia de quatro provas: escrita de matemática, oral de matemática, composição de ensaio literário e oral de física. Aqueles que, como eu, se formavam no ensino médio com distinção (na União Soviética, o aluno recebia uma medalha de ouro), eram automaticamente aceitos depois de tirar 5, a nota mais alta, na primeira prova.

Naquela altura, eu havia progredido muito em matemática no ensino médio e, assim, parecia que passaria com facilidade no exame da MGU.

No entanto, eu fui otimista demais. O primeiro tiro de advertência veio sob a forma de uma carta que recebi da escola em que estudara por correspondência. Essa escola fora organizada alguns anos antes por, entre outros, Israel Gelfand, famoso matemático soviético (posteriormente, falarei muito mais a seu respeito). Ela se destinava a ajudar os estudantes que, como eu, viviam fora das principais cidades e não tinham acesso a escolas de matemática especiais. Todos os meses, os estudantes recebiam uma apostila explicando o material estudado, e um pouco mais além. Também continha alguns problemas, mais difíceis do que aqueles discutidos na escola, que o aluno deveria resolver e enviar de volta pelo correio. Os avaliadores (em geral, estudantes da Universidade de Moscou) analisavam essas soluções e as enviavam, com comentários, para os alunos. Fiquei matriculado nessa escola por correspondência durante três anos, e também em outra mais voltada para a física. Foi um recurso de grande auxílio para mim, ainda que o material fosse muito parecido com aquele que eu estudava no colégio (ao contrário do que eu estava aprendendo pessoalmente com Evgeny Evgenievich).

A carta que recebi dessa escola por correspondência era curta – "Se você quiser se candidatar a uma vaga na Universidade Estadual de Moscou, visite nosso escritório, e ficaremos felizes de lhe ajudar" – e dava o endereço no campus da MGU e o horário de expediente. Pouco depois de recebê-la, peguei o trem para Moscou, numa viagem de duas horas. O escritório da escola por correspondência era uma sala grande, com algumas mesas e pessoas trabalhando, datilografando e corrigindo papéis. Apresentei-me, mostrei a carta e, de imediato, fui levado à presença de uma mulher franzina, de trinta e poucos anos.

– Qual é o seu nome? – ela perguntou, a título de cumprimento.

– Eduard Frenkel. – (Eu usava a versão russa de Edward naquele tempo.)

– E você quer se candidatar à MGU?

– Sim.

– Que departamento?

– *Mekh-Mat.*

– Entendo. – Ela abaixou os olhos e perguntou: – E qual é sua nacionalidade?

– Russa – respondi.

– É mesmo? E qual é a nacionalidade dos seus pais?

– Bem… Minha mãe é russa.

– E o seu pai?

– Meu pai é judeu.

Ela concordou com um gesto de cabeça.

O diálogo talvez pareça surrealista para você, e, enquanto escrevo isso agora, também parece para mim. Mas, na União Soviética, em 1984 – lembram-se de Orwell?[*] –, não era considerado estranho perguntar para alguém qual era sua “nacionalidade”. No passaporte interno que todos os cidadãos soviéticos tinham de portar, havia de fato uma linha especial para “nacionalidade”. Vinha depois de (1) nome, (2) patrônimo, (3) sobrenome e (4) data de nascimento. Por isso, era chamado de *pyataya grafa,* a “quinta linha”. A nacionalidade também era registrada na certidão de nascimento, assim como as nacionalidades dos pais. Se as deles fossem diferentes, como em meu caso, os pais teriam a opção de dar ao filho a nacionalidade de um deles.

Para todos os efeitos, a quinta linha era o código para perguntar se alguém era judeu ou não (indivíduos de outras nacionalidades, como tártaros e armênios, contra os quais existiam preconceitos e perseguições – embora nem de longe no mesmo grau que contra os judeus – também eram pegos dessa maneira). Minha quinta linha dizia que eu era russo, mas meu sobrenome – que era o do meu pai e parecia evidentemente judeu – me denunciou.

É importante observar que minha família não era religiosa. Meu pai não foi criado numa tradição religiosa, nem eu. Naquela época, na União Soviética, a religião era quase inexistente. A maioria das igrejas da religião ortodoxa cristã tinha sido destruída ou estava fechada. As poucas igrejas existentes eram, em geral, frequentadas apenas por poucas *babushkas*(avós), como minha avó materna. Ela ia à missa ocasionalmente, na única igreja aberta na minha cidade natal. As sinagogas existiam em uma quantidade ainda menor. Não havia nenhuma em Kolomna; em Moscou, cuja população é de quase dez milhões de pessoas, oficialmente havia uma única sinagoga.[1] Frequentar uma igreja ou uma sinagoga era perigoso: a pessoa podia ser espionada por agentes à paisana e se meteria em apuros. Assim, quando se dizia que alguém era judeu, não era no sentido da religião, mas sim no sentido étnico, de “sangue”.

Mesmo se eu não estivesse usando o sobrenome do meu pai, minha origem judaica seria detectada pelo comitê de admissão, pois o formulário de inscrição pedia especificamente os nomes completos do pai e da mãe. Aqueles nomes incluíam os patrônimos, isto é, os nomes dos avós do candidato. O patrônimo do meu pai é Josef, o que parecia inequivocamente judaico na União Soviética daquela época. Esta teria sido outra maneira de descobrir minha ascendência (se o sobrenome não tivesse me denunciado). O sistema era estruturado de tal maneira a indicar aqueles que eram um quarto judeus, no mínimo.

Tendo estabelecido por meio dessa definição que eu era judeu, a mulher disse:

– Você sabe que judeus não são aceitos na Universidade de Moscou?

– O que a senhora quer dizer com isso?

– O que quero dizer é que você não deve se dar ao trabalho de se candidatar. Não perca o seu tempo. Não vão admiti-lo.

Eu não sabia o que dizer.

– Por isso a senhora me mandou essa carta?

– Sim. Só estava tentando ajudá-lo.

Olhei ao redor. Era evidente que todos no escritório tinham conhecimento do assunto de nossa conversa, mesmo que não a estivessem escutando com atenção. Aquilo já devia ter acontecido dezenas de vezes, e todos pareciam acostumados. Todos desviavam os olhos, como se eu fosse um paciente com uma doença terminal. Fiquei arrasado.

Eu tinha sofrido antissemitismo antes, mas na esfera pessoal, e não institucional. No quinto ano da escola, alguns colegas começaram a me insultar, gritando *evrey*, *evrey* (judeu, judeu). Acho que eles não tinham uma ideia clara do que isso significava, o que ficou evidente depois que alguns confundiram a palavra *evrey* com *evropeyets* (europeu) – eles devem ter escutado comentários antissemitas dos pais ou de outros adultos (infelizmente, o antissemitismo está profundamente enraizado na cultura russa). Eu era bastante forte e tinha a sorte de ter dois amigos que sempre ficavam do meu lado;

assim, jamais fui realmente agredido por aqueles valentões, mas era uma experiência desagradável. Eu era muito orgulhoso para contar aos professores ou aos meus pais, mas, certo dia, um professor ouviu por acaso e interveio. Em consequência, aqueles garotos foram imediatamente convocados pelo diretor, e os insultos pararam.

Meus pais tinham ouvido falar da discriminação contra judeus em exames vestibulares para as universidades, mas não tinham prestado muita atenção ao assunto. Em Kolomna, não existiam muitos judeus, e todos os supostos casos de discriminação de que meus pais tinham ouvido falar se relacionavam com cursos de física. Um argumento típico dizia que os judeus não eram aceitos nesses cursos porque os estudos se relacionavam à pesquisa nuclear e, portanto, à defesa nacional e aos segredos de Estado; o governo não queria judeus nessas áreas porque eles podiam emigrar para Israel ou outros países. Por essa lógica, aqueles que queriam estudar matemática pura não deveriam ser motivo de preocupação. Mas, aparentemente, alguém estava preocupado.

Tudo a respeito de minha conversa na MGU foi estranho. E não estou só falando do aspecto kafkiano da situação. É possível concluir que a mulher com quem conversei simplesmente tentou ajudar a mim e aos outros estudantes, advertindo-nos do que iria acontecer. Mas o caso foi realmente esse? Lembre-se, estamos falando de 1984, quando o Partido Comunista e a KGB ainda controlavam rigidamente todos os aspectos da vida na União Soviética. A política oficial do Estado era a de que todas as nacionalidades eram iguais, e sugerir publicamente o contrário colocaria a pessoa em perigo. No entanto, aquela mulher falou tranquilamente a respeito disso para mim – um estranho que ela tinha acabado de conhecer – e, aparentemente, não se preocupou em ser ouvida por seus colegas.

Além disso, os exames na MGU eram sempre agendados um mês antes dos de todas as outras escolas. Portanto, os estudantes que não conseguissem ingressar ainda teriam a chance de se candidatar para outras universidades. Por que alguém procuraria convencê-los de nem mesmo tentar? Parecia que forças poderosas estavam procurando afugentar a mim e aos outros estudantes judeus.

No entanto, não desanimei. Após conversarmos a respeito da questão por longo tempo, meus pais e eu achamos que eu não tinha nada a perder. Decidimos que me candidataria à MGU e esperaria o melhor.

O primeiro exame, no início de julho, era a prova escrita de matemática. Sempre consistia de cinco problemas. O quinto era considerado fatal e insolúvel. Era como o quinto elemento da prova. Mas eu fui capaz de resolver todos os problemas, incluindo o quinto. Sabendo da grande probabilidade de o avaliador estar predisposto contra mim, procurando lacunas em minhas soluções, escrevi tudo em detalhes. Em seguida, examinei e reexaminei todos os meus argumentos e cálculos, para me certificar de que não tinha cometido nenhum erro. Tudo parecia perfeito. No trem, voltando para casa, senti-me bastante otimista. No dia seguinte, revelei minhas soluções para Evgeny Evgenievich, e ele confirmou que tudo estava correto. Aparentemente, eu tinha começado bem.

A prova seguinte era a oral de matemática. Foi marcada para 13 de julho, que era uma sexta-feira.

Lembro-me muito bem de diversos detalhes daquele dia. A prova estava marcada para o começo da tarde, e, de manhã, peguei o trem em Kolomna com minha mãe. Entrei na sala da MGU alguns minutos antes da prova. Era uma sala de aula normal, com quatro ou cinco examinadores e quinze a vinte estudantes. No início da prova, cada um de nós teve de tirar uma folha de uma grande pilha, na mesa situada na frente da sala. Cada folha tinha duas perguntas escritas e estava virada com o lado em branco para cima. Era como tirar um bilhete de loteria; por isso, chamávamos aquela folha de *bilet*, ou seja, bilhete. Talvez existissem cem perguntas, no total, todas conhecidas de antemão. Realmente, não me importava que bilhete eu tiraria, pois sabia a matéria muito bem. Depois de tirar o bilhete, cada estudante tinha de se sentar em uma carteira escolar e elaborar a resposta, usando somente as folhas em branco.

As duas questões que meu bilhete pedia eram: (1) um círculo inscrito num triângulo e a fórmula para a área do triângulo usando seu raio; e (2) a derivada da proporção de duas funções (somente a fórmula). Estava bastante preparado para essas perguntas e poderia respondê-las dormindo.

Sentei-me, escrevi algumas fórmulas numa folha de papel e concluí meus pensamentos. Deve ter levado cerca de dois minutos. Não havia necessidade de me preparar mais; eu estava pronto. Levantei minha mão. Havia diversos examinadores na sala, e todos estavam esperando que os candidatos levantassem suas mãos, mas, de modo estranho, eles me ignoraram, como se eu não existisse. Fiquei sentado com minha mão levantada por algum tempo: nenhuma reação.

Então, após cerca de dez minutos, dois outros candidatos levantaram as mãos e, logo em seguida, os examinadores correram na direção deles. Os examinadores se sentaram ao lado dos dois estudantes e os escutaram enquanto eles respondiam às perguntas. Eu estava perto deles e, assim, consegui ouvi-los. Os examinadores eram muito educados e, na maioria das vezes, concordavam com um gesto de cabeça, só ocasionalmente formulando perguntas complementares. Nada fora do normal. Quando um estudante terminava de responder às perguntas do bilhete (depois de dez minutos, aproximadamente), o examinador lhe dava um novo problema para resolver. Aqueles problemas pareciam bastante simples, e a maioria dos estudantes os resolvia imediatamente. E era isso.

A primeira dupla de estudantes já tinha ido embora feliz, tendo evidentemente ganhado um 5, a maior nota, e eu continuava sentado ali. Finalmente, agarrei um dos examinadores que passou perto de mim, um jovem que parecia ter terminado o doutorado recentemente, e lhe perguntei:

– Por que vocês não estão falando comigo?

Ele desviou o olhar e disse em voz baixa:

– Desculpe, não temos permissão de falar com você.

Após uma hora, aproximadamente, dois homens de meia-idade entraram na sala. Dirigiram-se rapidamente até a mesa na frente da sala e se apresentaram ao rapaz que estava sentado ali. Ele fez que sim com a cabeça e me apontou. Ficou claro que aqueles dois eram as pessoas que eu estivera esperando: meus inquisidores.

Eles se aproximaram de minha carteira e se apresentaram. Um deles era magro e leve, enquanto o outro era ligeiramente obeso e usava um grande bigode.

– OK – o magro disse. Ele conduziu a maior parte da conversa. – O que temos aqui? Qual é a primeira pergunta?

– O círculo inscrito num triângulo e…

Ele me interrompeu:

– Qual é a definição de um círculo?

Ele era bastante agressivo, em contraste acentuado com a maneira como os outros examinadores tratavam os estudantes. Além disso, os outros examinadores jamais perguntavam qualquer coisa antes de o estudante ter a chance de apresentar totalmente sua resposta para a pergunta do bilhete.

Respondi:

– Um círculo é o conjunto de pontos equidistantes de um determinado ponto no plano.

Era a definição-padrão.

– Errado! – o homem afirmou, animadamente.

Como eu podia estar errado? Ele esperou alguns segundos e, então, afirmou:

– É o conjunto de *todos* os pontos equidistantes de um determinado ponto no plano.

Aquilo pareceu uma crítica excessiva, baseada em um detalhe sem importância – o primeiro sinal de problemas à frente.

– OK – o homem disse, e prosseguiu: – Qual é a definição de um triângulo?

Depois de eu dar a definição, ele pensou a respeito por algum tempo, sem dúvida tentando achar alguma falha. Então, dizer:

– E qual é a definição de um círculo inscrito num triângulo?

Isso nos levou à definição de linha tangente, então apenas "uma linha", e aquilo levou a outras coisas, e, em pouco tempo, ele estava me fazendo perguntas a respeito do quinto postulado de Euclides acerca da singularidade das linhas paralelas, que nem fazia parte do currículo do ensino médio. Estávamos conversando a respeito de assuntos que não tinham nada a ver com a pergunta do bilhete e muito além do que eu deveria saber.

Cada palavra que eu dizia era questionada. Cada conceito tinha de ser definido, e, se outro conceito fosse usado na definição, então eu era imediatamente solicitado a também defini-lo.

Evidentemente, se meu sobrenome fosse Ivanov, jamais teria sido alvo dessas perguntas. Em retrospecto, a linha de ação prudente da minha parte teria sido protestar imediatamente e dizer aos examinadores que eles estavam sendo inadequados. Mas é fácil falar isso agora. Eu tinha 16 anos, e aqueles homens eram cerca de 25 anos mais velhos. Eram funcionários ministrando um exame na Universidade Estadual de Moscou, e me senti obrigado a responder às perguntas deles da melhor maneira possível.

Após quase uma hora de interrogatório, passamos para a segunda pergunta do meu bilhete. Naquela altura, os outros estudantes tinham partido, e a sala estava vazia. Aparentemente, eu era o único que exigia "cuidados especiais". Acho que eles tentavam identificar os estudantes judeus, para que não houvesse mais do que um ou dois no mesmo recinto.

A segunda pergunta me pediu para escrever a fórmula da derivada da proporção de duas funções. Não fui solicitado a dar nenhuma definição ou prova. A pergunta pedia especificamente só a fórmula. No entanto, claro, os examinadores insistiram que eu explicasse a eles todo o capítulo do livro de cálculo.

– Qual é a definição de derivada?

A definição-padrão que dei envolveu o conceito de limite.

– Qual é a definição de limite? – Em seguida: – O que é função? – E assim por diante.

A questão de discriminação étnica no exame vestibular da MGU foi tema de diversas publicações. Por exemplo, Mark Saul, matemático e educador, em um artigo perspicaz[2] em *Notices of the American Mathematical Society*, utilizou minha história como exemplo. Apropriadamente, comparou meu exame com a Rainha Vermelha interrogando Alice, em *Alice no País das Maravilhas.* Eu sabia as respostas, mas, naquele jogo, no qual tudo que eu dizia era usado contra mim, eu não podia ganhar.

Também em *Notices*, em outro artigo[3] sobre esse assunto, o jornalista George G. Szpiro apresentou esse relato:

> Judeus – ou candidatos com nomes aparentemente judeus – eram escolhidos nos exames vestibulares para tratamento especial… Os obstáculos eram erguidos no exame oral. Aos candidatos indesejados eram formuladas "perguntas assassinas", que exigiam muito raciocínio e longos cálculos. Algumas perguntas eram impossíveis de ser resolvidas, eram formuladas de maneira ambígua ou não tinham resposta correta. Não eram idealizadas para testar a capacidade do candidato, mas se destinavam a eliminar os "indesejáveis". Frequentemente, as provas cansativas e flagrantemente injustas duravam cinco ou seis horas, ainda que, por lei, devessem se limitar a três horas e meia. Mesmo se as respostas do candidato fossem corretas, motivos sempre podiam ser encontrados para reprová-lo. Certa vez, um candidato foi reprovado por responder à pergunta "Qual é a definição de um círculo?" com "O conjunto de pontos equidistantes de um determinado ponto". A resposta correta, segundo o examinador, era "O conjunto de todos os pontos equidistantes de um determinado ponto". Em outra ocasião, uma resposta para a mesma pergunta foi considerada incorreta porque o candidato não especificou que a distância tinha de ser diferente de zero. Quando solicitado a dar as soluções para uma equação, a resposta "1 e 2" foi

considerada incorreta, pois, de acordo com o examinado, a resposta correta era “1 ou 2” (numa ocasião distinta, o mesmo examinador disse a outro estudante exatamente o oposto: a resposta “1 ou 2” foi considerada incorreta).

Mas voltemos ao meu exame. Outra hora e meia tinha se passado. Então, um dos examinadores afirmou:

– OK, terminamos com as perguntas. Aqui está um problema que queremos que você resolva.

O problema que ele me deu era bastante difícil. A solução exigia o uso do assim chamado princípio de Sturm, que não era estudado na escola.[4] No entanto, eu o conhecia, por conta do meu curso por correspondência. Assim, fui capaz de resolvê-lo. Quando estava fazendo os cálculos finais, o examinador retornou.

– Já terminou?

– Quase.

Ele observou minhas anotações e, sem dúvida, percebeu que minha solução estava correta e que eu estava simplesmente acabando meus cálculos.

– Sabe, vou lhe apresentar outro problema – ele disse.

Curiosamente, o segundo problema era duas vezes mais difícil que o primeiro. Mesmo assim, fui capaz de resolvê-lo, mas o examinador novamente me interrompeu.

– Ainda não acabou? – ele perguntou. – Tente esse, então.

Se fosse uma luta de boxe, com um dos pugilistas acuado num canto, ensanguentado, tentando desesperadamente se manter de pé, defendendo-se de uma saraivada de golpes (muitos deles baixos, devo acrescentar), aquele seria o equivalente ao golpe final. À primeira vista, o problema parecia simples: dado um círculo e dois pontos no plano fora do círculo, construa outro círculo passando através desses dois pontos e tocando o primeiro círculo em um ponto.

No entanto, a solução é de fato bastante complicada. Mesmo um matemático profissional não seria necessariamente capaz de resolvê-lo com rapidez. Precisaria usar um truque denominado inversão ou seguir uma construção geométrica elaborada. Nenhum dos dois métodos era estudado no ensino médio, e, portanto, o problema não deveria ter sido permitido nesse exame.

Eu tinha estudado inversão e percebi que poderia aplicá-la naquele caso. Comecei a resolver o problema, mas, alguns minutos depois, os meus interrogadores voltaram e se sentaram perto de mim. Um deles disse:

– Sabe, acabamos de ter uma conversa com o vice-presidente do comitê de admissão e discutimos o seu caso. Ele nos perguntou por que ainda estamos perdendo nosso tempo… Veja – ele puxou um formulário de aparência oficial com algumas observações rabiscadas nele. Foi a primeira vez que eu o vi –, na primeira pergunta de seu bilhete, você não nos deu a resposta completa; você nem mesmo sabia a definição de um círculo. Assim, tivemos que te dar um menos. Na segunda pergunta, seu conhecimento também foi questionável, mas tudo bem, demos um mais ou menos. Em seguida, você não conseguiu resolver completamente o primeiro problema e não resolveu o segundo problema. E o terceiro? Você também não o resolveu. Veja, não tivemos outra escolha senão reprová-lo.

Olhei para o meu relógio. Mais de quatro horas tinham se passado desde o início do exame. Eu estava exausto.

– Posso ver minha prova escrita?

O outro homem se dirigiu para a mesa e trouxe minha prova. Colocou-a na minha frente. Enquanto virava as páginas, tive a impressão de estar num filme surrealista. Todas as respostas estavam corretas, todas as soluções estavam corretas. No entanto, existiam muitos comentários. Estavam todos escritos a lápis – assim poderiam ser facilmente apagados, estimei –, mas eram todos ridículos, como alguém fazendo uma brincadeira comigo. Um dos comentários ainda subsiste na minha memória: durante um cálculo, escrevi “

$\sqrt{8}$ > 2”. E havia um comentário ao lado: “não demonstrado”. É mesmo? Outros comentários não eram melhores. E que nota me deram, por todos os cinco problemas resolvidos, com todas as respostas corretas? Nem 5, nem 4. Deram-me 3, o equivalente russo ao C dos EUA. Deram um C por isso?

Eu sabia que era o fim. Não havia maneira de conseguir enfrentar esse sistema.

– Tudo bem.

– Você não vai entrar com um recurso? – um dos homens perguntou.

Sabia que havia um comitê de recursos. Mas qual seria o propósito? Talvez conseguisse subir minha nota na prova escrita de 3 para 4, mas entrar com um recurso contra o resultado da prova oral seria mais difícil: seria a palavra deles contra a minha. E mesmo se eu conseguisse subir minha nota para 3, por exemplo, e daí? Ainda havia mais duas provas em que poderiam me pegar.

Eis o que George Szpiro escreveu no *Notices*:[5]

> E se um candidato, contra todos os prognósticos, conseguisse ser aprovado na prova escrita e na prova oral, sempre poderia ser reprovado no ensaio obrigatório sobre literatura russa com a frase feita “O tema não foi suficientemente elaborado”. Com raríssimas exceções, os recursos contra decisões negativas não tinham chance de sucesso. Na melhor das hipóteses, eram ignorados; na pior, o candidato era punido por mostrar “desrespeito pelos examinadores”.

Uma dúvida maior era: eu realmente queria me matricular numa universidade em que faziam de tudo para me impedir de entrar? Respondi:

– Não. Na realidade, quero desistir da minha inscrição.

Os dois demonstraram contentamento. Não entrar com um recurso significava menos incômodo para eles, menos possibilidade de confusão.

– Certo – o examinador tagarela disse. – Pegarei seu material imediatamente.

Saímos da sala e entramos no elevador. As portas se fecharam. Estávamos apenas eu e um dos examinadores. Ele estava, evidentemente, de bom humor.

– Você se saiu muito bem. Um desempenho realmente impressionante. Estava querendo saber: você frequentou uma escola especializada em matemática?

– Cresci numa cidade pequena. Não existia nenhuma escola especializada em matemática.

– Sério? Talvez seus pais sejam matemáticos?

– Não, eles são engenheiros.

– Interessante… É a primeira vez que conheço um estudante tão forte em matemática que não frequentou uma escola especializada.

Não conseguia acreditar no que ele estava dizendo. Aquele homem tinha acabado de me reprovar depois de uma prova com quase quatro horas de duração, cansativa, discriminatória e injustamente ministrada. Tudo que eu sabia era que ele tinha matado meu sonho de me tornar um matemático. Um estudante de 16 anos, cujo único defeito era o de ter nascido em uma família judaica… E, naquele momento, aquele sujeito estava me elogiando e esperando que eu me abrisse com ele?

Mas o que eu podia fazer? Gritar com ele, dar um soco na cara dele? Fiquei apenas parado ali, em silêncio, aturdido. Ele continuou:

– Vou lhe dar um conselho. Procure o Instituto de Petróleo e Gás de Moscou. Eles têm um curso de matemática aplicada que é muito bom. Aceitam estudantes *como você* lá.

As portas do elevador se abriram e, um minuto depois, ele me entregou minha grossa pasta da inscrição, com alguns dos meus prêmios escolares saindo dela de forma estranha.

– Boa sorte para você – ele desejou, mas eu estava muito cansado para responder. Minha única vontade era escapar dali.

E, então, estava do lado de fora, sobre a imensa escadaria do enorme edifício da MGU. Eu respirava de novo o ar fresco do verão e escutava os sons da grande cidade vindos de longe. Estava ficando escuro, e quase não havia ninguém por perto. De imediato, localizei meus pais, que me esperaram ansiosamente nos degraus durante todo aquele tempo. Pela minha expressão e pela grande pasta que estava segurando nas mãos, eles souberam imediatamente o que acontecera dentro do prédio.

[*] Foi um ano antes de Mikhail Gorbachev chegar ao poder na União Soviética e dois anos antes de ele lançar a *perestroika.* Em 1984, o regime totalitário soviético era, sob vários aspectos, uma cópia inquietante do livro visionário de George Orwell.

Capítulo 4

Kerosinka

Naquela noite, após o exame, meus pais e eu chegamos na casa bem tarde. Ainda estávamos em estado de choque em relação ao que acontecera.

Foi uma experiência muito dolorosa para os meus pais. Sempre fui bastante próximo deles, e eles sempre me deram amor e apoio incondicionais. Nunca me pressionaram a estudar com mais afinco ou a escolher uma profissão específica, mas me estimularam a ir atrás da minha paixão. E, naturalmente, estavam orgulhosos das minhas habilidades. Ficaram arrasados com o que aconteceu comigo no exame, tanto por causa da injustiça absoluta como pelo fato de terem sido incapazes de fazer alguma coisa para proteger seu filho.

Trinta anos antes, em 1954, o sonho do meu pai de se tornar um físico teórico também fora interrompido brutalmente, mas por um motivo distinto. Como outras milhões de pessoas inocentes, o pai dele, ou seja, meu avô, fora vítima das perseguições de Josef Stalin. Em 1948, ele foi preso sob a falsa acusação de querer explodir uma grande fábrica de automóveis em Gorky (atualmente, Níjni Novgorod), onde trabalhava como chefe de suprimentos. A única “prova” apresentada em sua acusação foi a caixa de fósforos encontrada em sua posse no momento da prisão. Ele foi enviado a um campo de trabalhos forçados, numa mina de carvão, na região norte da Rússia, parte do Arquipélago Gulag, que Alexander Soljenítsin e outros escritores descreveram de maneira tão vívida anos depois. Meu avô foi considerado "inimigo do povo", e meu pai era, portanto, "filho de um inimigo do povo".

Meu pai foi obrigado a escrever isso em seu pedido de inscrição para o departamento de física da Universidade de Gorky. Ainda que ele tenha concluído o ensino médio com distinção e devesse ser aceito automaticamente na universidade, foi reprovado na entrevista, cujo único objetivo era marginalizar os parentes dos "inimigos do povo". Então, meu pai foi forçado a ir para uma escola de engenharia (como outros prisioneiros, meu avô foi reabilitado e solto pelo decreto de Nikita Khrushchov, em 1956, mas, àquela altura, era muito tarde para reparar a injustiça).

Agora, trinta anos depois, seu filho tinha de passar por uma experiência semelhante.

No entanto, não houve tempo para autocomiseração. Tínhamos de decidir rapidamente o que fazer a seguir, e a primeira questão envolvia a escola para qual eu deveria me candidatar. Todas realizavam seus exames ao mesmo tempo, em agosto, dali a cerca de duas semanas, e eu só podia me candidatar a uma delas.

Na manhã seguinte, meu pai acordou cedo e voltou para Moscou. Ele levou a recomendação do examinador da MGU a sério. Parecia que o examinador estava tentando me ajudar, talvez como uma espécie de compensação parcial pela injustiça que cometera. Assim, depois que meu pai chegou a Moscou, ele foi direito ao escritório de admissões do Instituto de Petróleo e Gás.[*] De algum modo, conseguiu achar alguém disposto a conversar com ele privadamente e relatou minha situação. O membro da universidade disse que tinha conhecimento do antissemitismo na MGU, mas afirmou que o Instituto de Petróleo e Gás era diferente. Ele ainda revelou que o nível dos candidatos para seu curso de matemática aplicada era bastante alto devido à grande quantidade de estudantes como eu, que não eram aceitos na MGU. O exame de acesso não seria nada fácil. Mas, ele disse:

– Se o seu filho for tão brilhante quanto você diz, ele será admitido. Não há discriminação contra judeus nos exames aqui. – Eno fim da conversa, afirmou: – Porém, tenho de preveni-lo. Nossos cursos de pós-graduação são dirigidos por pessoas diferentes, e acho que seu filho provavelmente não será aceito na escola de pós-graduação.

No entanto, isso era algo para me preocupar dentro de cinco anos; muito tempo à frente.

Em Moscou, meu pai ainda visitou outras duas escolas com cursos de matemática aplicada, mas nenhuma delas com a atitude que encontrou no Instituto de Petróleo e Gás. Assim, naquela noite, quando ele voltou para casa e contou as novidades para mim e minha mãe, decidimos imediatamente que eu me candidataria ao Instituto de Petróleo e Gás, para seu curso de matemática aplicada.

O Instituto era uma das doze escolas de Moscou que formavam técnicos para diversos setores industriais, tais como o Instituto de Metalurgia e o Instituto de Engenheiros Ferroviários (na União Soviética, muitas faculdades eram chamadas de institutos). A partir do final da década de 1960, o antissemitismo praticado pela MGU "criou um mercado para colocações em matemática para estudantes judeus", como Mark Saul escreveu em seu artigo.[1] O Instituto de Petróleo e Gás "começou a satisfazer esses mercados, beneficiando-se das políticas antissemitas das outras universidades em relação à admissão de estudantes altamente qualificados". Mark Saul explica:

> Seu apelido, Kerosinka, refletia (seu) orgulho e cinismo. Um kerosinka é um aquecedor portátil a querosene; uma resposta de tecnologia simples, mas eficaz, contra a adversidade. Os estudantes e os diplomados do instituto rapidamente se tornaram conhecidos como "kerosineshchicks", e

> a escola se tornou um refúgio para os estudantes judeus apaixonados por matemática.
>
> Como o destino escolheu Kerosinka como repositório de tanto talento? A resposta não é fácil. Sabemos que existiam outras instituições que se beneficiaram da exclusão dos judeus da MGU. Também sabemos que o estabelecimento dessa política de exclusão era uma ação consciente, que provavelmente encontrou alguma resistência inicialmente. Talvez tivesse sido mais fácil para algumas instituições continuarem a aceitar estudantes judeus do que instituir uma nova política. No entanto, depois que o fenômeno cresceu e havia um núcleo de estudantes judeus em Kerosinka, por que isso foi tolerado? Existiam boatos tenebrosos a respeito de uma conspiração da polícia secreta (KGB) para manter os estudantes judeus sob vigilância em um ou dois lugares. No entanto, parte da motivação pode ter sido mais positiva: a administração do instituto pode ter percebido um bom departamento se desenvolvendo e ter feito o possível para preservar o fenômeno.

Acredito que a última frase seja mais exata. Vladimir Nikolaevich Vinogradov, reitor do Instituto de Petróleo e Gás, era um administrador inteligente, conhecido por contratar professores comprometidos com ensino e pesquisa inovadores e com o uso de novas tecnologias nas salas de aula. Vinogradov instituiu a política de que todos os exames (incluindo os de admissão) eram dados por escrito. Claro que talvez ainda houvesse oportunidade para irregularidades, mesmo com provas escritas (como foi o caso com minha prova escrita na MGU), mas a regra impediria o tipo de desastre que aconteceu na minha prova oral, na MGU. Não ficaria surpreso se houvesse uma decisão pessoal de Vinogradov de não discriminar candidatos judeus. Em caso afirmativo, isso deve ter exigido boa vontade e talvez até coragem da sua parte.

Como predito, não houve discriminação no vestibular. Fui aceito depois da primeira prova (escrita de matemática), na qual tirei 5; isto é, um A (os detentores de medalha de ouro no ensino médio eram aceitos diretamente se tirassem um A na primeira prova). Num capricho estranho, esse 5 não veio fácil para mim, pois, aparentemente, algumas das minhas soluções foram digitadas incorretamente no sistema de pontuação automatizado, e, em consequência, minha nota foi inicialmente registrada como 4, ou B. Tive de passar pelo processo de apelação, o que significou uma espera na fila durante horas, com todos os tipos de maus pensamentos atravessando minha mente. No entanto, quando entrei para conversar com o comitê de recursos, o erro foi encontrado e corrigido rapidamente, uma desculpa foi dada, e minha saga relativa ao exame vestibular chegou ao fim.

Em 1° de setembro de 1984, o ano escolar começou, e conheci meus novos colegas de classe. Apenas cinquenta alunos eram aceitos por ano para esse curso (em contraste, no *Mekh-Mat,* eram aceitos perto de quinhentos). Diversos colegas meus passaram pela mesma experiência que eu. Eram alguns dos estudantes de matemática mais brilhantes e mais talentosos disponíveis.

Todos, exceto eu e outro aluno, Misha Smolyak, de Kishinev, que se tornou meu companheiro de quarto no dormitório, eram de Moscou. Aqueles que viviam fora de Moscou só podiam se candidatar se tivessem se formado no ensino médio com uma medalha de ouro, o que felizmente eu tinha.

Muitos dos meus colegas estudaram nas melhores escolas moscovitas, com cursos especializados de matemática: as escolas n° 57, n° 179, n° 91 e n° 2. Alguns se tornaram matemáticos profissionais e, atualmente, trabalham como professores em algumas das melhores universidades do mundo. Na minha turma, tínhamos alguns dos melhores matemáticos de nossa geração: Pasha Etingof, atualmente professor no MIT; Dima Kleinbock, professor na Universidade Brandeis; e Misha Finkelberg, professor na Escola Superior de Economia, em Moscou. Era um ambiente muito estimulante.

A matemática era ensinada em Kerosinka em alto nível, e as matérias básicas, como análise, análise funcional e álgebra linear, tinham o mesmo nível de rigor da MGU. No entanto, matérias de outras áreas de matemática pura, como geometria e topologia, não estavam disponíveis. Kerosinka só oferecia o curso de matemática aplicada; assim, nossa educação era direcionada para aplicações concretas, em particular para a exploração e produção de petróleo e gás. Tínhamos de cursar algumas matérias de orientação mais aplicada: otimização, análise numérica, probabilidade e estatística. Também havia um grande componente de ciência da computação.

Fiquei contente com a oportunidade de cursar essas matérias de matemática aplicada. Ensinou-me que não havia realmente uma distinção nítida entre matemática "pura" e a "aplicada"; a matemática aplicada de boa qualidade sempre se baseia em matemática pura sofisticada. No entanto, por mais útil que tenha sido essa experiência, ela não foi capaz de me fazer esquecer o meu amor verdadeiro. Eu sabia que tinha de achar uma maneira de aprender os tópicos de matemática pura que não eram oferecidos em Kerosinka.

A solução apresentou-se quando fiquei amigo de outros estudantes, incluindo aqueles que frequentavam prestigiosas escolas especializadas em matemática de Moscou. Trocávamos nossas histórias. Aqueles que eram judeus (de acordo com os padrões que descrevi anteriormente) também foram reprovados nos exames, tão brutalmente quanto eu fui, enquanto todos os seus colegas de classe que não eram judeus foram aceitos na MGU sem nenhum problema. Por meio desses outros estudantes, sabiam o que estava acontecendo no *Mekh-Mat,* que matérias eram boas, e onde e quando as palestras eram realizadas. Assim, em minha segunda semana em Kerosinka, um colega de classe (acho que foi Dima Kleinbock) me disse:

– Ei, estamos indo no curso de Kirillov, na MGU. Não quer vir conosco?

Kirillov era um matemático famoso, e, claro, eu queria assistir às suas palestras. Mas não tinha a menor ideia de como isso seria possível. O imenso edifício da MGU era protegido severamente pela polícia. Era necessário ter uma identidade especial para entrar.

– Não se preocupe. Nós vamos pular a cerca – meu colega de classe disse.

Aquilo pareceu perigoso e excitante; então, respondi:

– Claro!

A cerca na lateral do edifício era bastante alta (tinha, facilmente, cerca de seis metros de altura), mas, em um ponto, o metal estava curvado, e era possível se infiltrar no terreno. E então? Entramos no edifício por uma porta lateral e, depois de atravessarmos longos corredores, acabamos na cozinha. Atravessamos a cozinha, tentando não atrair muita atenção do pessoal que trabalhava ali, alcançamos o refeitório e, em seguida, o saguão de entrada principal. Pegamos o elevador até o 14° andar, onde ficava o auditório.

Alexander Alexandrovich Kirillov (ou San Sanych, como ele era afetuosamente chamado) é um professor carismático e um grande ser humano, a quem cheguei a conhecer muito bem anos depois. Acho que ele estava dando um curso da graduação sobre teoria da representação, na linha de seu conhecido livro. Ministrava ainda um seminário para estudantes de pós-graduação, que também frequentávamos.

Escapamos impunes da invasão graças ao bom coração de Kirillov. Seu filho Shurik (atualmente, professor da Stony Brook University) estudou na escola especializada em matemática n° 179, junto com meus colegas de classe Dima Kleinbock e Syoma Hawkin. Obviamente, San Sanych sabia da situação relativa às admissões na MGU. Muitos anos depois, ele me contou que não havia nada que pudesse fazer a esse respeito; não lhe permitiam participar do comitê de admissão, que era, em grande medida, composto de *apparatchiks* do Partido Comunista. Assim, tudo que ele podia fazer era permitir que nos infiltrássemos furtivamente em seus cursos.

Kirillov fazia tudo ao seu alcance para acolher favoravelmente os estudantes de Kerosinka que frequentavam suas aulas. Uma das melhores lembranças do meu primeiro ano de faculdade foi assistir a suas aulas e seminários brilhantes. Também frequentei um seminário dado por Alexander Rudakov, o que também foi uma grande experiência.

Enquanto isso, eu estava aprendendo tudo que podia de matemática em Kerosinka. Morava num dormitório da faculdade, mas voltava para casa nos finais de semana, e ainda estava me encontrando com Evgeny Evgenievich a cada duas semanas. Ele me recomendava alguns livros para ler, e eu relatava para ele o meu progresso. No entanto, eu estava alcançando rapidamente o ponto em que, para manter meu ímpeto e também minha motivação, precisaria de um mentor com quem me encontrasse com mais regularidade, não só para aprender, mas também para receber um problema para resolver. Como não estava no *Mek-Mat,* não podia tirar proveito dos inúmeros recursos que aquele departamento tinha a oferecer. E eu era muito tímido para me aproximar de alguém como A. A. Kirillov e lhe pedir para trabalhar comigo individualmente ou me dar um problema para resolver. Sentia-me como um intruso. No semestre da primavera de 1986 (meu segundo ano em Kerosinka), a complacência e a estagnação estavam começando a se manifestar. Com todas essas condições desfavoráveis, comecei a duvidar de que poderia realizar meu sonho de me tornar um matemático.

*Na época, o instituto era conhecido como Instituto Gubkin da Indústria Petroquímica e do Gás (o nome era uma homenagem a I. M. Gubkin, ministro de longa data do Ministério de Petróleo e Gás da URSS). Depois que virei estudante ali, foi renomeado como Instituto Gubkin de Petróleo e Gás e, posteriormente, como Universidade Gubkin de Petróleo e Gás.

Capítulo 5

Linhas de solução

Estava começando a me desesperar quando, certo dia, durante um intervalo de aula em Kerosinka, Alexander Nikolaevich Varchenko, um de nossos professores mais respeitados, aproximou-se de mim, no corredor. Varchenko é um ex-aluno de Vladimir Arnold, um dos principais matemáticos soviéticos, e ele próprio é um matemático de reconhecimento internacional.

– Você estaria interessado em trabalhar num problema matemático? – ele perguntou.

– Sim, é claro – respondi. – Que tipo de problema? – perguntei, como se não estivesse feliz em trabalhar com o problema que fosse.

– É uma questão que surgiu em minha pesquisa, que acho que é um bom problema para dar a um aluno brilhante como você. O especialista nessa matéria é Dmitry Borisovich Fuchs. – Era o nome de um matemático famoso, de que eu já tinha ouvido falar. – Já falei com Dmitry, e ele concordou em supervisionar a pesquisa de um aluno sobre esse tópico. Aqui está o número de telefone dele. Ligue para o Dmitry, e ele lhe dirá o que fazer.

É bastante comum para matemáticos experientes como Varchenko encontrar todos os tipos de problemas matemáticos não resolvidos em sua pesquisa. Se o problema de Varchenko estivesse intimamente ligado ao seu próprio programa de pesquisa, ele talvez tivesse tentando resolvê-lo sozinho. Contudo, nenhum matemático faz tudo sozinho; assim, os matemáticos muitas vezes delegam alguns desses problemas não resolvidos (geralmente, aqueles que consideram mais simples) para seus alunos. Às vezes, um problema talvez esteja fora dos interesses imediatos do professor, mas ele pode ficar curioso a respeito dele, como era o caso do meu problema. E foi por isso que Varchenko chamou Fuchs, especialista nessa área, para me supervisionar. De modo geral, era, na maioria das vezes, uma "transação" típica nos trabalhos sociais do mundo da matemática.

O que era realmente incomum era que Fuchs não estava formalmente associado com o ensino em alguma universidade. No entanto, ele passou muitos anos tentando, juntamente com diversos outros matemáticos de alto nível, aliviar o efeito da discriminação contra estudantes judeus, dando aulas particulares para jovens talentosos que foram impedidos de ingressar na MGU.

Como parte dessas iniciativas, Fuchs se envolvera no que ficou conhecido como "Universidade Popular Judaica", uma escola noturna não oficial, onde ele e seus colegas davam aulas para os estudantes. Algumas dessas aulas foram ministradas em Kerosinka, embora antes do meu ingresso.

A escola fora organizada por Bella Muchnik Subbotovskaya, mulher corajosa, que era seu coração e alma. Infelizmente, a KGB entrou no caso, alarmada com o fato de haver reuniões não autorizadas de judeus. No devido tempo, ela foi chamada pela KGB e interrogada. Pouco depois, foi morta por um caminhão sob circunstâncias suspeitas, o que levou muitas pessoas a suspeitarem de um assassinato a sangue frio.[1] Sem ela no comando, a escola fechou.

Cheguei a Kerosinka dois anos depois dessa trágica cadeia de eventos. Embora a escola noturna não existisse mais, ainda havia uma pequena rede de matemáticos profissionais que ajudavam proscritos desventurados como eu, numa base individual. Eles procuravam alunos promissores e lhes davam recomendações, estímulos e, em certos casos, aconselhamento e orientação. Esse foi o motivo pelo qual Varchenko deu aquele problema para mim, um estudante de Kerosinka, e não um estudante do *Mekh-Mat*, onde, por meio de suas relações, poderia ter encontrado facilmente um aluno disposto a assumi-lo. Esse também foi o motivo pelo qual Fuchs se dispôs a investir seu tempo pessoal para me supervisionar.

Fico contente que ele tenha se disposto. Em retrospectiva, fica claro para mim que, sem a gentileza e generosidade de Fuchs, jamais teria me tornado matemático. Estava estudando matemática em Kerosinka e participando como ouvinte de aulas na MGU, mas isso não era suficiente. De fato, é quase impossível para os estudantes realizarem sua própria pesquisa sem alguém orientando seu trabalho. Ter um orientador é absolutamente fundamental.

Na época, porém, tudo que eu sabia era que tinha, em minha mão, o número do telefone de Fuchs, renomado matemático, e estava prestes a ingressar num projeto supervisionado por ele. Era inacreditável! Não sabia onde aquilo iria acabar, mas percebi de imediato que algo grande acontecera.

Naquela noite, depois de reunir toda a minha coragem, liguei para Fuchs de um telefone público e expliquei quem eu era.

– Sim, eu sei – Fuchs afirmou. – Tenho de lhe entregar um artigo para ler.

No dia seguinte, nós nos encontramos. Fuchs tinha a aparência física de um gigante, de jeito nenhum como eu o imaginara. Ele era muito profissional.

– Aqui está – ele disse, entregando-me uma cópia de um artigo. – Procure ler isso, e, quando você encontrar uma palavra que não entender, ligue-me.

Senti que ele tinha acabado de me entregar o Santo Graal.

Era um artigo com doze páginas, que fora escrito alguns anos antes, a respeito de "grupos de tranças". Naquela noite, comecei a lê-lo.

Os três anos anteriores de estudo com Evgeny Evgenievich e por minha própria conta não foram em vão. Não só entendi todas as palavras do título, mas também fui capaz de compreender o conteúdo. Decidi tentar ler todo o artigo sozinho. Era uma questão de orgulho. Já estava imaginando o quão impressionado Fuchs ficaria quando lhe contasse que havia compreendido tudo sozinho.

Eu já tinha ouvido falar dos "grupos de tranças". São exemplos excelentes de grupos, o conceito que discutimos no capítulo 2. Evgeny Evgenievich apresentara esse conceito no contexto das simetrias, e muitos elementos dos grupos que consideramos eram simetrias de algum objeto. Por exemplo, o grupo circular consistia de simetrias de uma mesa redonda (ou qualquer outro objeto redondo), e o grupo de quatro rotações era o grupo de simetrias de uma mesa quadrada (ou qualquer outro objeto quadrado). Uma vez que temos a noção de "grupo", podemos procurar outros exemplos. Acontece que há diversos exemplos de grupos que não têm nada a ver com simetrias, que foram nossa motivação para introduzir o conceito de um grupo. De fato, essa é uma história típica. A criação de um conceito matemático pode ser motivada por problemas e fenômenos em uma área da matemática (ou física, engenharia etc.), mas, posteriormente, pode acabar se revelando útil e bem adaptada a outras áreas.

Constata-se que muitos grupos não resultam de simetrias, como é o caso do de tranças.

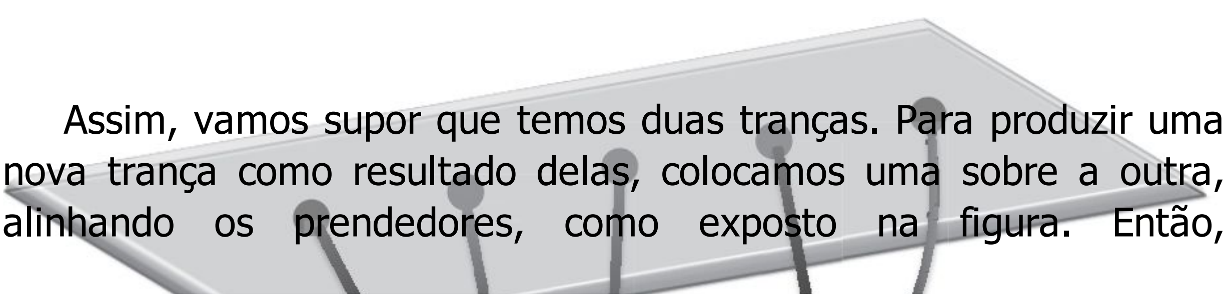
Ainda não tinha conhecimento das aplicações no mundo real dos grupos de tranças, em áreas como criptografia, computação quântica e biologia, que comentaremos posteriormente. Mas fiquei fascinado com a beleza inata dessas abstrações matemáticas.

Há um grupo de tranças para cada número natural $n = 1, 2, 3\ldots$ Podemos utilizar esses números para dar um nome para cada grupo de tranças. Em geral, nós os denominamos B_n, e, assim, para $n = 1$, temos um grupo denominado B_1, para n = 2, temos um grupo denominado B_2, e assim por diante.

Para descrever o grupo B_n precisamos descrever primeiro seus elementos, como fizemos em relação às simetrias rotacionais das mesas redonda e quadrada. Os elementos do grupo B_n são as assim chamadas *tranças com n fios*, tais como aquelas expostas na figura abaixo, com n = 5. Imagine duas placas sólidas e transparentes, com cinco prendedores em cada uma, com um fio ligando cada prendedor em uma placa a um prendedor na outra. Como as placas são transparentes, podemos ver cada um dos fios em sua totalidade. Cada fio pode se entrelaçar ao redor de qualquer outro fio da maneira que quisermos, mas *não* pode se enredar consigo mesmo. Cada prendedor deve se conectar exatamente a um fio. As posições das placas são fixas em qualquer situação.

Todo esse objeto – duas placas e seja lá quantos fios – constitui uma trança única, da mesma forma que um carro possui quatro rodas, uma transmissão, quatro portas etc. Não estamos considerando essas partes separadamente; estamos enfocando uma trança como um todo.

Essas são as tranças com n fios. Agora, precisamos demonstrar que todas as tranças com n fios formam um grupo. Isso significa que precisamos descrever como fazer a composição de duas dessas tranças. Em outras palavras, para cada par de tranças com n fios, temos de produzir outra trança com n fios, da mesma forma que aplicar duas rotações, uma após a outra, dá-nos uma terceira rotação. E, então, teremos de verificar se essa composição satisfaz as propriedades especificadas no capítulo 2.



Assim, vamos supor que temos duas tranças. Para produzir uma nova trança como resultado delas, colocamos uma sobre a outra, alinhando os prendedores, como exposto na figura. Então, removemos as placas intermediárias e, ao mesmo tempo, conectamos os fios superiores aos inferiores, presos aos prendedores correspondentes.

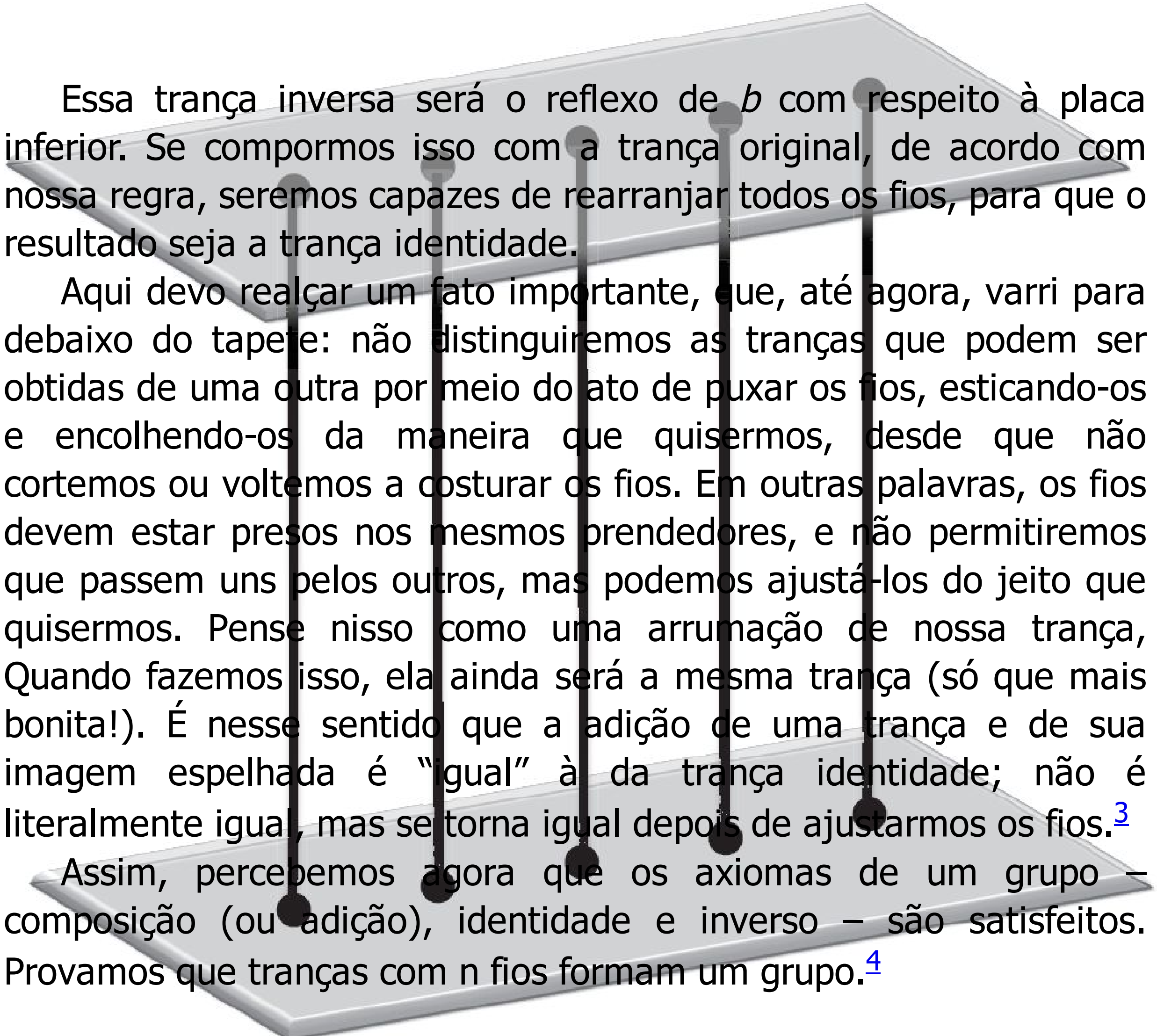
A trança resultante terá o dobro de altura, mas esse não é o problema. Simplesmente encurtaremos os fios, para que a trança resultante tenha a mesma altura das originais e, ao mesmo tempo, preserve a maneira pela qual os fios sigam ao redor mutuamente. *Voilà!* Começamos com duas tranças e produzimos uma nova. Essa é a regra de composição de duas tranças em nosso grupo de tranças.

Como um grupo de tranças não resulta de simetrias, às vezes é melhor pensar nessa operação não como "composição" (o que era natural no caso dos grupos de simetrias), mas como "adição" ou "multiplicação", semelhante às operações que realizamos com números. Desse ponto de vista, as tranças são como números – são como alguns "números cabeludos", por assim dizer.

Dados dois números inteiros, podemos somá-los e produzir um novo número. Da mesma forma, dadas duas tranças, produzimos uma nova mediante a regra descrita acima. Assim, podemos pensar a esse respeito como a "adição" de duas tranças.

Agora, temos de verificar se essa adição de tranças satisfaz todas as propriedades (ou axiomas) de um grupo. Em primeiro lugar, precisamos do elemento identidade (no grupo circular, era o ponto correspondente à rotação de 0 grau). Esse será a trança com todos os fios indo diretamente para baixo, sem nenhum entrelaçamento, como exposto na próxima figura. É um tipo de trança "trivial", em que nenhum entrelaçamento realmente ocorre; da mesma maneira, a rotação de 0 grau não provoca nenhuma rotação.[2]

Em seguida, devemos encontrar a trança inversa de uma dada trança *b* (no caso do grupo circular, era a rotação do mesmo ângulo, mas na direção oposta). Deveria ser dessa maneira se adicionarmos essa trança à trança *b*, e, de acordo com a regra descrita acima, obteremos a trança identidade.



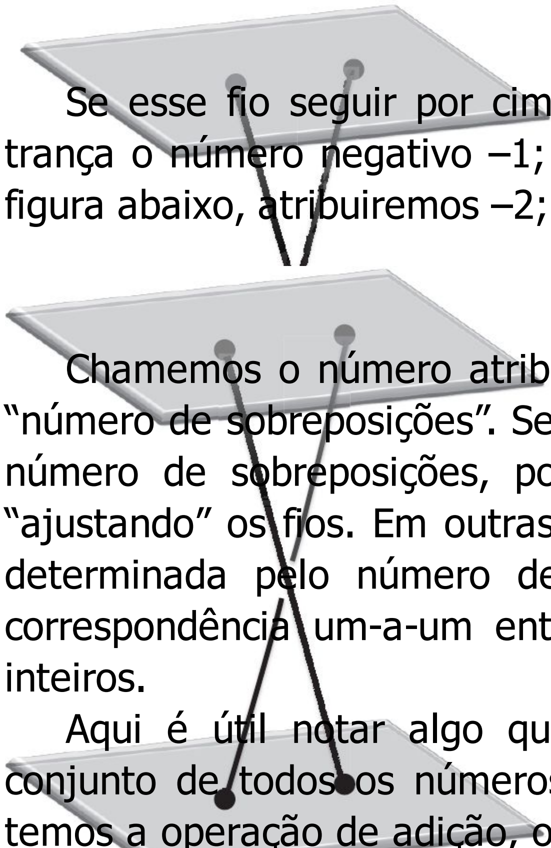
Essa trança inversa será o reflexo de *b* com respeito à placa inferior. Se compormos isso com a trança original, de acordo com nossa regra, seremos capazes de rearranjar todos os fios, para que o resultado seja a trança identidade.

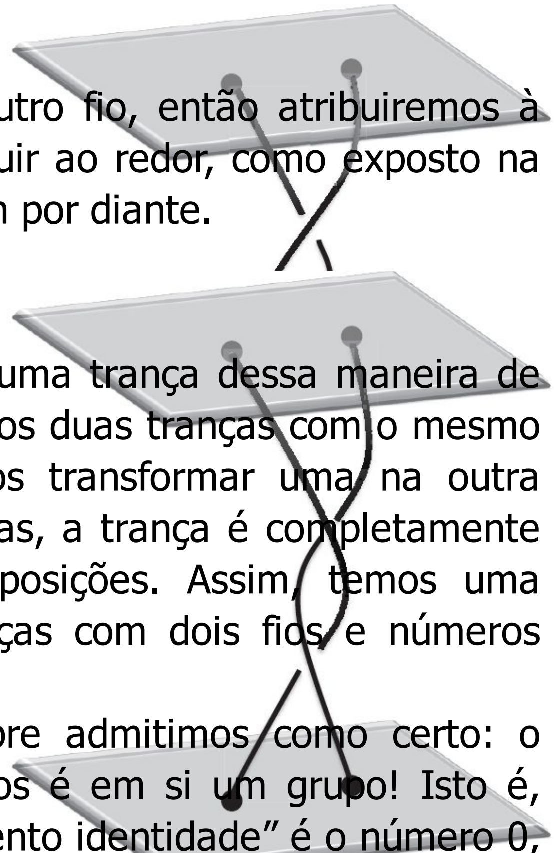
Aqui devo realçar um fato importante, que, até agora, varri para debaixo do tapete: não distinguiremos as tranças que podem ser obtidas de uma outra por meio do ato de puxar os fios, esticando-os e encolhendo-os da maneira que quisermos, desde que não cortemos ou voltemos a costurar os fios. Em outras palavras, os fios devem estar presos nos mesmos prendedores, e não permitiremos que passem uns pelos outros, mas podemos ajustá-los do jeito que quisermos. Pense nisso como uma arrumação de nossa trança, Quando fazemos isso, ela ainda será a mesma trança (só que mais bonita!). É nesse sentido que a adição de uma trança e de sua imagem espelhada é "igual" à da trança identidade; não é literalmente igual, mas se torna igual depois de ajustarmos os fios.[3]

Assim, percebemos agora que os axiomas de um grupo – composição (ou adição), identidade e inverso – são satisfeitos. Provamos que tranças com n fios formam um grupo.[4]

Para visualizar o que os grupos de tranças são de modo mais concreto, consideremos com atenção o mais simples: o grupo B_2 de tranças com dois fios (o grupo B_1 com um fio possui só um elemento e, assim, não há nada para discutir).[5] Vamos atribuir a cada trança um número inteiro *N*. Por número inteiro, quero dizer aqui um número natural: 1, 2, 3…; ou 0; ou um negativo de um número natural: –1, –2, –3…

Em primeiro lugar, para uma trança identidade, atribuiremos o número 0. Em segundo lugar, se o fio, que começa no prendedor esquerdo da placa superior, seguir por baixo do outro fio, então atribuiremos o número 1. Se seguir ao redor do outro fio, então atribuiremos o número 2, e assim por diante, como exposto nas figuras.





Se esse fio seguir por cima do outro fio, então atribuiremos à trança o número negativo –1; se seguir ao redor, como exposto na figura abaixo, atribuiremos –2; e assim por diante.

Chamemos o número atribuído a uma trança dessa maneira de “número de sobreposições”. Se tivermos duas tranças com o mesmo número de sobreposições, poderemos transformar uma na outra “ajustando” os fios. Em outras palavras, a trança é completamente determinada pelo número de sobreposições. Assim, temos uma correspondência um-a-um entre tranças com dois fios e números inteiros.

Aqui é útil notar algo que sempre admitimos como certo: o conjunto de todos os números inteiros é em si um grupo! Isto é, temos a operação de adição, o “elemento identidade” é o número 0, e, para qualquer número inteiro N, seu “inverso” é $-N$. Então, todas as propriedades especificadas no capítulo 2 são satisfeitas. De fato, temos $N + 0 = N$ e $N + (-N) = 0$.

O que acabamos de descobrir é que o grupo de tranças com dois fios possui a mesma estrutura do grupo de números inteiros.[6]

Agora, no grupo de números inteiros, a soma de dois números inteiros a e b é igual em duas ordens distintas:

$$a + b = b + a.$$

Isso também acontece no grupo de tranças B_2. Os grupos que satisfazem essa propriedade são denominados “comutativos” ou “abelianos” (em homenagem a Niels Henrik Abel, matemático norueguês).

Numa trança com três fios ou mais, os fios podem se enredar entre si de uma forma muito mais complicada que numa trança com apenas dois fios. O padrão de criação de nós não pode mais ser descrito meramente pelo número de sobreposições (observe a figura abaixo de uma trança com três fios). O padrão de ocorrência das sobreposições também é importante. Além disso, constata-se que a adição de duas tranças com três ou mais fios depende da ordem em que isso é feito (quer dizer, qual das duas tranças está no topo, na figura acima, descrevendo a adição de tranças). Em outras palavras, no grupo B_n, com $n = 3, 4, 5$ …, temos, em geral:

$$a + b \neq b + a.$$

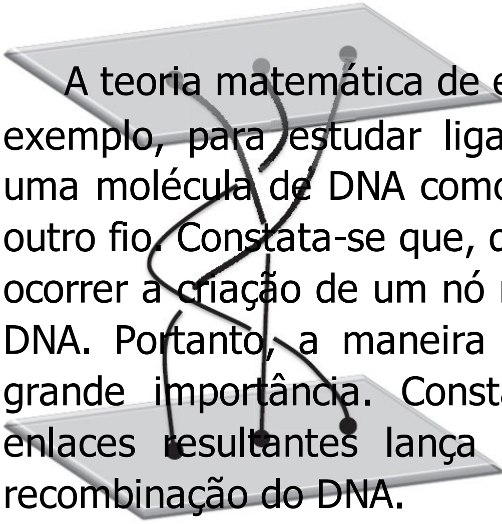
Tais grupos são denominados “não comutativos” ou “não abelianos”.

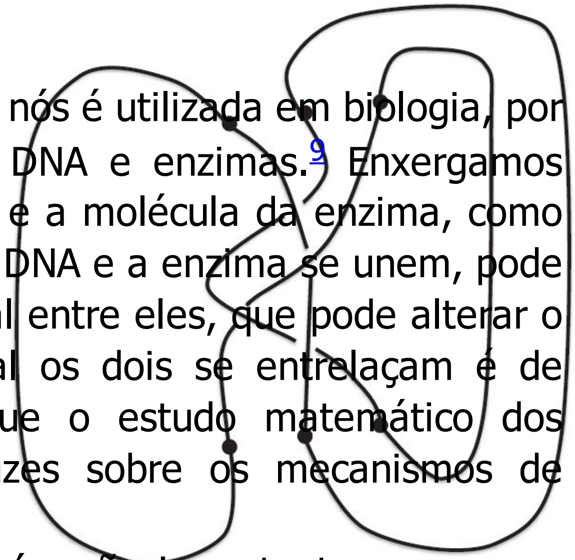
Os grupos de tranças apresentam muitas aplicações práticas importantes. Por exemplo, são utilizados para desenvolver algoritmos de criptografia de chave pública eficientes e robustos.[7]

Outra direção promissora é o projeto de computadores quânticos baseados na criação de tranças complexas de partículas quânticas, conhecidas como ânions. Suas trajetórias se entrelaçam mutuamente, e suas sobreposições são utilizadas para construir “portas lógicas” do computador quântico.[8]

Também há aplicações em biologia. Dada uma trança com n fios, podemos numerar os prendedores nas duas placas de 1 a n, da esquerda para a direita. Em seguida, podemos ligar as extremidades dos fios presos nos prendedores com o mesmo número nas duas placas. Isso criará o que os matemáticos denominam “enlace”: uma união de loops se entrelaçando mutuamente.

No exemplo exposto nesta imagem, há somente um loop. O nome que os matemáticos dão para isso é “nó”. Em geral, existirão diversos fios fechados.





A teoria matemática de enlaces e nós é utilizada em biologia, por exemplo, para estudar ligações de DNA e enzimas.[9] Enxergamos uma molécula de DNA como um fio, e a molécula da enzima, como outro fio. Constata-se que, quando o DNA e a enzima se unem, pode ocorrer a criação de um nó não trivial entre eles, que pode alterar o DNA. Portanto, a maneira pela qual os dois se entrelaçam é de grande importância. Constata-se que o estudo matemático dos enlaces resultantes lança novas luzes sobre os mecanismos de recombinação do DNA.

Em matemática, as tranças também são importantes por causa de sua interpretação geométrica. Para explicar isso, consideremos todas as possíveis coleções de *n* pontos no plano. Assumiremos que os pontos são distintos; isto é, para quaisquer dois pontos, suas posições no plano devem ser diferentes. Escolhamos essa coleção; isto é, *n* pontos arranjados numa linha reta, com a mesma distância entre pontos vizinhos. Consideremos cada ponto como um pequeno inseto, Quando colocamos música, esses insetos despertam e começam a se mover no plano. Se enxergarmos o tempo como a direção vertical, então a trajetória de cada inseto parecerá um fio. Se as posições dos insetos no plano são distintas sempre – isto é, se assumirmos que os insetos não colidem, então esses fios jamais se cruzarão. Enquanto a música está tocando, eles podem se mover ao redor uns dos outros, exatamente como os fios de uma trança. No entanto, exigimos que, ao tirarmos a música depois de um período fixo de tempo, os insetos se posicionem numa linha reta, da mesma maneira como no início, mas cada um pode terminar numa posição inicialmente ocupada por outro inseto. Então, a trajetória coletiva deles parecerá uma trança com *n* fios.

Portanto, as tranças com *n* fios podem ser vistas como trajetórias no espaço das coleções de *n* pontos distintos no plano.[10]

O problema que Varchenko me deu, e no qual estava prestes a começar a trabalhar com Fuchs, relacionava-se com uma parte do grupo de tranças denominada “subgrupo comutador”. Lembremos que, para tranças com dois fios, definimos o número de sobreposições. Um número similar pode ser atribuído a uma trança com qualquer número de fios.[11] Utilizamos isso para definir o subgrupo comutador B'_n do grupo de tranças com n fios. Ele consiste em todas as tranças cujo número total de sobreposições é zero.[12]

O problema que tinha para resolver envolvia calcular os assim chamados “números de Betti” do grupo B'_n. Esses números refletem propriedades profundas desse grupo, que são importantes nas aplicações. Como analogia, considere um objeto físico, como uma casa. Ela possui diversas características: algumas mais óbvias, como número de andares, aposentos, portas, janelas etc., e outras menos óbvias, como proporções dos materiais com os quais é construída. Da mesma forma, um grupo também possui diversas características, que são os números de Betti.[13] Fuchs tinha computado anteriormente os números de Betti do próprio grupo de tranças B_n. Ele me deu seu artigo para que eu pudesse aprender os conceitos básicos do assunto.

Numa semana, fui capaz de ler todo o artigo de Fuchs sozinho, de vez em quando pesquisando conceitos e definições previamente desconhecidos para mim, em minha biblioteca razoavelmente grande de livros de matemática.

Liguei para Fuchs.

– Ah, é você – ele disse. – Estava me perguntando por que você ainda não tinha ligado. Começou a ler o artigo?

– Sim, Dmitry Borisovich. Na realidade, já terminei de lê-lo.

– Terminou? – Fuchs pareceu surpreso. – Bem, então vamos nos encontrar. Quero saber o que você aprendeu.

Fuchs sugeriu um encontro no dia seguinte na MGU, depois de um seminário que ele iria acompanhar. Enquanto me preparava para o encontro, reli o artigo e exercitei respostas para os tipos de perguntas que achei que Fuchs faria. Um matemático de nível internacional como ele não adotaria um novo estudante por compaixão. O padrão estabelecido era alto. Entendi que minha primeira conversa com Fuchs seria algo como um teste, e por isso fiquei tão ansioso em causar uma boa impressão.

Nós nos encontramos na hora marcada e percorremos os corredores do *Mekh-Mat* para encontrar um banco no qual não seríamos incomodados. Depois de nos sentarmos, comecei a relatar para Fuchs o que tinha aprendido de seu artigo. Escutou com atenção, ocasionalmente me fazendo perguntas. Achei que ele estava satisfeito com o que estava escutando. Fuchs ficou curioso para saber onde eu havia aprendido todas aquelas coisas, e lhe contei sobre meus estudos com Evgeny Evgenie- vich, sobre minhas leituras e as palestras que havia acompanhado no *Mekh-Mat*. Conversamos até sobre meu exame na MGU (claro que isso não era algo novo para Fuchs).

Felizmente, nosso encontro transcorreu bem. Fuchs pareceu impressionado com meu conhecimento. Ele me disse que eu estava pronto para enfrentar o problema de Varchenko e que me ajudaria.

Naquela noite, ao sair da MGU, sentia-me eufórico. Estava prestes a começar a trabalhar no meu primeiro problema de matemática, orientado por um dos melhores matemáticos do mundo. Menos de dois anos tinham se passado desde meu exame no *Mekh-Mat*. Eu estava de volta ao jogo.

Capítulo 6

Aprendiz de matemático

Solucionar um problema matemático é como resolver um quebra-cabeça, exceto pelo fato de que você não conhece com antecedência a aparência da imagem final. Pode ser difícil, pode ser fácil, ou pode ser impossível de resolver. Você nunca sabe até realmente resolvê-lo (ou constatar que é impossível resolvê-lo). Essa incerteza talvez seja o aspecto mais difícil de ser um matemático. Em outras matérias, você pode improvisar, propor outras soluções, até mudar as regras do jogo. Mesmo a própria ideia do que constitui uma solução não é claramente definida. Por exemplo, se formos incumbidos de melhorar a produtividade de uma empresa, que métricas utilizaremos para medir o sucesso? Uma melhoria de 20% valerá como solução do problema? E cerca de 10%? Em matemática, o problema é sempre bem definido, e não há ambiguidade a respeito do que significa a solução. Ou você resolve o problema ou não o resolve.

Para o problema de Fuchs, eu devia calcular os números de Betti dos grupos B'_n. Não havia ambiguidades no que isso significava. Significa a mesma coisa hoje para todos os familiarizados com a linguagem da matemática que significava em 1986, quando aprendi sobre esse problema, e significará a mesma coisa daqui a cem anos.

Eu sabia que Fuchs havia resolvido um problema parecido e conhecia sua solução. Preparei-me para a tarefa trabalhando em problemas similares, para os quais as soluções já eram conhecidas. Isso me proporcionou intuição, habilidades e um conjunto de ferramentas e métodos. No entanto, não conseguia saber *a priori* quais desses métodos funcionariam ou de que maneira deveria abordar o problema – ou mesmo se conseguiria resolvê-lo sem criar uma técnica basicamente nova ou um método totalmente diferente.

Esse dilema persegue todos os matemáticos. Consideremos um dos problemas mais famosos da matemática, o Último Teorema de Fermat, para ver como alguém aborda um problema fácil de enunciar, mas cuja solução está longe de ser óbvia. Determine um número natural n, isto é, 1, 2, 3…, e considere a equação

$$x^n + y^n = z^n$$

sobre os também números naturais x, y e z.

Se $n = 1$, obtemos a equação

$$x + y = z,$$

que, sem dúvida, possui diversas soluções entre os números naturais: simplesmente utilize quaisquer x e y e determine $z = x + y$. Note que aqui utilizamos a operação de adição de números naturais que discutimos no capítulo anterior.

Se $n = 2$, obtemos a equação

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Essa equação também possui diversas soluções em números naturais; por exemplo:

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Tudo isso era conhecido desde a antiguidade. O que era desconhecido era se a equação tinha soluções para n maior que 2. Parece bastante simples, não? Quão difícil pode ser responder a uma pergunta como essa?

Bem, ao que se constatou, bastante difícil. Em 1637, Pierre de Fermat, matemático francês, deixou uma anotação em um antigo livro dizendo que, se n fosse maior que 2, então a equação não teria soluções x, y e z que fossem números naturais. Em outras palavras, não somos capazes de encontrar três números naturais x, y e z que obedeçam a uma equação como

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

não somos capazes de encontrar três números naturais x, y e z que obedeçam à equação

$$x^4 + y^4 = z^4,$$

e assim por diante.

Fermat escreveu que descobrira uma demonstração simples desse enunciado, para todo n maior que 2, mas escreveu também que "esta margem de página é estreita demais para contê-la". Muitas pessoas, matemáticos profissionais e amadores, assumiram a anotação de Fermat como um desafio e tentaram reproduzir essa "demonstração", transformando-a no problema matemático mais famoso de todos os tempos. Prêmios foram anunciados. Centenas de demonstrações foram escritas e publicadas, mas só para serem desmentidas posteriormente. O problema permaneceu insolúvel durante 350 anos.

Em 1993, Andrew Wiles, um matemático de Princeton, divulgou sua própria demonstração do Último Teorema de Fermat. No entanto, à primeira vista, ela não tinha nada a ver com o problema original. Em vez de demonstrar o Último Teorema de Fermat, Wiles enfrentou a assim chamada conjectura de Shimura–Taniyama–Weil, que trata de algo completamente diferente e é muito mais complicada de enunciar. Contudo, alguns anos antes, Ken Ribet, matemático de Berkeley, demonstrara que o enunciado dessa conjectura envolve o Último Teorema de Fermat. E é por isso que uma demonstração da conjectura também demonstraria o Último Teorema de Fermat. No capítulo 8, falaremos a respeito de tudo isso em detalhes. O fato que quero realçar agora é que aquilo que parece um problema simples pode não ter necessariamente uma solução elementar. Atualmente, não resta dúvida para nós de que Fermat não demonstrou o enunciado atribuído a ele. Campos inteiros da matemática tiveram de ser criados para fazer isso; um desenvolvimento que exigiu muito trabalho duro de inúmeras gerações de matemáticos.[1]

Seria possível predizer tudo isso, dada essa equação de aparência inocente?

$$x^n + y^n = z^n$$

De jeito nenhum!

Em relação a qualquer problema matemático, você jamais sabe o que a solução envolverá. Você espera e reza para ser capaz de descobrir uma solução atraente e elegante, e talvez descobrir algo interessante pelo caminho. Além disso, você certamente espera ser capaz de fazer isso num período de tempo razoável, sem ter de esperar 350 anos para chegar à conclusão. No entanto, você nunca pode ter certeza.

No caso do meu problema, tive sorte; de fato, havia uma solução elegante que eu era capaz de achar num período de tempo relativamente curto: cerca de dois meses. No entanto, ela não chegou facilmente para mim. Nunca chega. Tentei diversos métodos distintos. À medida que cada um deles falhava, sentia-me cada vez mais frustrado e ansioso. Aquele era meu primeiro problema, e, inevitavelmente, questionei minha capacidade de me tornar um matemático. Esse problema foi meu primeiro teste, que me diria se eu tinha, afinal, o que era necessário.

O trabalho não me isentou de frequentar as aulas e fazer provas em Kerosinka, mas minha maior prioridade era o problema, e passei horas intermináveis debruçado sobre ele, noites e finais de semana. Estava me pressionando demais. Comecei a ter problemas com o sono; foi a primeira vez que isso aconteceu comigo. A insônia que desenvolvi durante o trabalho nesse problema foi o primeiro "efeito colateral" da minha pesquisa matemática. Assombrou-me durante muitos meses na sequência, e, a partir daí, jamais me permiti perder-me tão completamente num problema matemático.

Encontrava-me com Fuchs quase toda semana no edifício do *Mekh-Mat*, onde lhe relatava os detalhes do meu progresso, ou a falta do mesmo (naquela altura, ele havia conseguido arranjar uma identidade especial para mim, e, assim, eu não tinha mais de pular a cerca). Fuchs sempre me deu apoio e estímulo, e, todas as vezes que nos encontrávamos, ele me falava a respeito de um novo macete ou sugeria um novo *insight*, que eu procuraria aplicar no meu problema.

E então, subitamente, achei a solução; ou, talvez de modo mais exato, a solução se apresentou por si mesma, em todo o seu esplendor.

Estava tentando utilizar um dos métodos padrão para calcular os números de Betti que Fuchs me ensinara, denominado "sequência espectral". Era capaz de aplicá-lo até certo ponto, o que me permitiu, em princípio, calcular os números de Betti do grupo B'_n, a partir do conhecimento dos números de Betti de todos os grupos B'_m, com $m < n$. A limitação era, claro, que eu não sabia o que eram aqueles outros números de Betti.

No entanto, isso me deu uma maneira de enfrentar o problema: se eu conseguisse *adivinhar* a resposta correta, então teria um caminho para *demonstrá-la* seguindo esse método.

É fácil falar, mas criar essa suposição exigiu muitos cálculos de amostra, que simplesmente se tornavam cada vez mais complicados. Durante muito tempo, nenhum padrão pareceu emergir.

De repente, como num passe de mágica, tudo ficou claro para mim. O quebra-cabeça se completou, e a imagem final se revelou plena de elegância e beleza, num momento que sempre lembrarei e tratarei com carinho. Foi uma sensação incrível de elevação, que fez todas aquelas noites em claro valerem a pena.

Pela primeira vez na minha vida, tinha em meu poder algo que *ninguém mais no mundo* tinha. Era capaz de dizer algo novo a respeito do universo. Não era a cura do câncer, mas era uma peça valiosa de conhecimento, e ninguém poderia tirá-la de mim.

Se você vivenciar essa sensação uma vez, vai querer vivenciá-la de novo. Foi a primeira vez que aconteceu para mim, e, como o primeiro beijo, tornou-se muito especial. Soube, então, que podia me considerar um matemático.

Na realidade, a resposta foi bastante inesperada e muito mais interessante do que Fuchs e eu podíamos imaginar. Descobri que, para cada divisor do número natural n (o número de fios nas tranças que estamos considerando), existe um número de Betti do grupo B'_n que é igual à célebre Função de Euler daquele divisor.[2]

A Função de Euler atribui a qualquer número natural d um outro número natural denominado $\phi(d)$. Esse é o número de inteiros entre 1 e d que são *relativamente primos* com d; isto é, não possuem divisores comuns com d (exceto 1, é claro).

Por exemplo, utilize $d = 6$. Então, 1 é relativamente primo de 6; 2 não é (ele é um divisor de 6); 3 não é (também é divisor de 6); 4 não é (4 e 6 compartilham um divisor comum, isto é, 2); 5 é relativamente primo de com 6; e 6 não é. Assim, existem dois números naturais entre 1 e 6 que são relativamente primos com 6:

isto é, 1 e 5. Portanto, a função de Euler de 6 é igual a 2. Anotamos isso como $\phi(6) = 2$.

A Função de Euler possui diversas aplicações. Por exemplo, é empregada no assim chamado algoritmo RSA, utilizado para criptografar números de cartão de crédito em transações on-line (isso é explicado na nota 7 do capítulo 14). O nome da função homenageia Leonhard Euler, matemático suíço do século XVIII.

O fato de os números de Betti que descobri terem sido dados pela Função de Euler sugeriu a existência de algumas ligações ocultas entre os grupos de tranças e a teoria dos números. Portanto, o problema que eu resolvera podia ter implicações muito além de seu escopo original.

Claro que eu estava ansioso para contar sobre os meus resultados para Fuchs. Já era junho de 1986, quase três meses após o nosso primeiro encontro. Naquela altura, Fuchs havia saído de Moscou com sua mulher e suas duas jovens filhas, para passar o verão em sua *datcha* (pequena casa de veraneio comum na Rússia) perto de Moscou. Felizmente para mim, a casa se situava na mesma linha férrea que levava à minha cidade natal, aproximadamente na metade do caminho, e, assim, foi fácil visitá-lo ali.

Depois de me oferecer uma habitual xícara de chá, Fuchs perguntoume do meu progresso.

– Solucionei o problema!

Não conseguia conter minha excitação e acho que o relato da demonstração que dei foi bastante desconexo. Mas não me preocupei. Fuchs entendeu tudo rapidamente. Ele pareceu satisfeito.

– Isso é ótimo – ele afirmou. – Muito bem. Agora você tem de começar a escrever um artigo a respeito disso.

Foi a primeira vez que escrevi um artigo de matemática, e acabou se relevando não menos frustrante que meu trabalho matemático, mas muito menos divertido. Procurar novos padrões na vanguarda do conhecimento era cativante e empolgante. Sentar-se na minha escrivaninha, tentando organizar meus pensamentos e colocá-los no papel, era um processo totalmente diferente. Como alguém me disse tempos depois, escrever artigos era o castigo que tínhamos de suportar, em troca da emoção da descoberta da nova matemática. Foi a primeira vez que fui castigado.

Apresentei a Fuchs diversos rascunhos, e ele os leu atentamente, assinalando deficiências e sugerindo melhorias. Como sempre, foi extremamente generoso com sua ajuda. Desde o início, coloquei o nome de Fuchs como coautor, mas ele rejeitou categoricamente. "O artigo é seu", afirmou. Finalmente, Fuchs declarou que o artigo estava pronto e me disse que eu deveria encaminhá-lo à revista especializada em matemática *Functional Analysis and Applications*, dirigida por Israel Moiseevich Gelfand, o patriarca da escola matemática soviética.

Homem carismático e de baixa estatura, na ocasião com pouco mais de 70 anos, Gelfand era uma lenda na comunidade matemática moscovita. Ele dirigia um seminário semanal, realizado no grande auditório do décimo quarto andar do edifício principal da MGU. Era um importante acontecimento matemático e social, que acontecia havia mais de cinquenta anos e era conhecido em todo o mundo. Fuchs era um ex-colaborador de Gelfand (o trabalho deles a respeito do que ficou conhecido como Cohomologia de Gelfand–Fuchs era bastante conhecido e estimado) e um dos principais membros do seminário de Gelfand (os outros eram A. A. Kirillov, que foi ex-aluno de Gelfand, e M. I. Graev, colaborador de longa data de Gelfand).

O seminário era diferente de todos os outros de que eu já havia participado. Em geral, um seminário tem uma duração fixa – nos Estados Unidos, uma hora ou uma hora e meia – e há um palestrante que prepara uma palestra sobre um tópico específico, escolhido com antecedência. Ocasionalmente, os membros da plateia formulam perguntas. No seminário de Gelfand, não era assim. Acontecia todas as segundas-feiras, com início oficial marcado para as 19h. No entanto, o seminário raramente começava antes das 19h30. Em geral, era iniciado entre 19h45 e 20h. Mais ou menos nos sessenta minutos que antecediam o início, os membros do seminário, incluindo o próprio Gelfand (que, em geral, chegava entre 19h15 e 19h30), perambulavam sem rumo e conversavam entre si, dentro do auditório e no grande saguão externo. Sem dúvida, isso era o que Gelfand havia planejado. Era tanto um evento social como um seminário de matemática.

A maioria dos matemáticos que compareciam ao seminário de Gelfand trabalhava em diversos lugares que não eram ligados à MGU. O seminário era o único lugar em que eles podiam encontrar seus colegas, descobrir o que estava acontecendo no mundo da matemática, compartilhar suas ideias e forjar colaborações. Como Gelfand era judeu, seu seminário era considerado um dos "portos seguros" para os judeus e era até saudado como a única alternativa disponível (ou uma das poucas) em que os matemáticos judeus podiam participar (embora, para sermos justos, muitos outros seminários na MGU fossem abertos ao público e dirigidos por pessoas que não eram imbuídas de preconceitos contra nenhuma etnia). Sem dúvida, Gelfand tirava proveito disso de bom grado.

Na União Soviética, o antissemitismo que vivenciei em meu exame vestibular para a MGU estava disseminado em todos os níveis da academia. Anteriormente, na década de 1960 e no início dos anos 1970, apesar da existência de restrições, ou "cotas", para estudantes de origem judaica, eles ainda conseguiam ingressar no *Mekh-Mat* (a situação piorou gradualmente durante a década de 1970 e no início da década de 1980, ao ponto de que, em 1984, quando me candidatei a uma vaga no *Mekh-Mat*, quase nenhum estudante judeu era aceito).[3] No entanto, mesmo naqueles anos, era quase impossível o ingresso de estudantes judeus em escolas de pós-graduação. A única maneira pela qual podiam conseguir isso era indo trabalhar em algum lugar durante três anos depois de obter o diploma do ensino superior e, em seguida, sendo enviados para a escola de pós-graduação pelo empregador (frequentemente, localizada em uma província distante). E, mesmo se eles conseguissem superar esses obstáculos e obter um diploma de doutorado, era impossível obter um emprego acadêmico em matemática em Moscou (na MGU, por exemplo). Eles tinham de se contentar com uma vaga em algum lugar na província ou ingressar em um dos diversos institutos de pesquisa moscovitas, que tinham pouco ou nada a ver com matemática. A situação era ainda mais difícil para aqueles que não eram originalmente de Moscou, pois não tinham *propiska*, ou seja, visto de residência em seu passaporte interno, exigido para conseguir empregos na capital.

Mesmo os estudantes mais brilhantes recebiam esse tratamento. Vladimir Drinfeld, matemático genial e futuro ganhador da Medalha Fields, sobre quem falaremos mais tarde, teve permissão para se tornar estudante de pós-graduação na *Mekh-Mat*, pouco depois de obter seu diploma do ensino superior (ouvi dizer que isso foi muito difícil de ser arranjado), mas, sendo nativo de Kharkov, na Ucrânia, não conseguiu arrumar um emprego em Moscou. Ele teve de se contentar com um emprego de docente numa universidade provincial, em Ufa, cidade industrial nos Montes Urais. Com o tempo, Drinfeld conseguiu um emprego como pesquisador no Instituto de Física de Baixas Temperaturas, em Carcóvia.

Aqueles que ficavam em Moscou se empregavam em lugares como o Instituto de Sismologia ou o Instituto de Processamento de Sinais. Seus trabalhos diários consistiam em alguns cálculos tediosos relacionados a um setor industrial específico ao qual o instituto estava associado (embora alguns matemáticos conseguissem realmente abrir novos caminhos nessas áreas, graças aos seus múltiplos talentos). Eles tinham de realizar o tipo de pesquisa matemática que era sua verdadeira paixão como atividade paralela, nas horas vagas.

Em 1968, o próprio Gelfand foi forçado a deixar seu emprego de professor no *Mekh-Mat,* após assinar a famosa carta de 99 matemáticos exigindo a libertação de Alexander Esenin-Volpin (filho do poeta Sergei Esenin), matemático e ativista de direitos humanos, de uma detenção por motivos políticos num hospital psiquiátrico. A carta tinha uma redação tão hábil que, após ter sido divulgada pela rádio BBC, a indignação mundial obrigou a liderança soviética a libertar Esenin-Volpin quase imediatamente.[4] No entanto, isso também irritou profundamente as autoridades. Posteriormente, elas encontraram maneiras de punir todos que a assinaram. Muitos dos signatários foram demitidos de seus empregos de docência.[5]

Assim, Gelfand não era mais professor de matemática na MGU, embora fosse capaz de manter seu seminário, que ainda era realizado no edifício principal da MGU. Seu emprego oficial era no laboratório de biologia da MGU, que ele criara para realizar pesquisas nessa área, outra paixão sua.[*] Fuchs trabalhava do mesmo laboratório.

Previamente, Fuchs me incitara a começar a frequentar o seminário de Gelfand, e fui a alguns encontros no fim da primavera. Eles causaram uma forte impressão em mim. Gelfand comandava o seminário de modo bastante autoritário. Embora aos olhos de um leigo os encontros pudessem parecer caóticos e desorganizados, ele decidia cada aspecto e dedicava uma imensa quantidade de tempo e energia à preparação dos encontros semanais.

Três anos depois, quando Gelfand me pediu para falar a respeito do meu trabalho, tive a oportunidade de observar de perto o funcionamento interno do seminário. Por enquanto, estava vendo da perspectiva de um estudante de 17 anos que começava sua carreira na matemática.

De diversas maneiras, o seminário era o espetáculo de um único ator. Oficialmente, havia um palestrante relatando um tópico designado, mas, em geral, só uma parte do seminário era dedicada a isso. Frequentemente, Gelfand apresentava outros tópicos e chamava outros matemáticos, que não eram solicitados a se preparar com antecedência, ao quadro-negro para explicá-los. No entanto, Gelfand sempre estava no centro de tudo isso. Ninguém mais, controlava o andamento do seminário e tinha o poder absoluto de interromper o palestrante a qualquer momento com perguntas, sugestões e comentários. Ainda consigo ouvi-lo dizer "*Dayte opredelenie*" ("Dê a definição"), sua frequente advertência ao palestrante.

Gelfand também tinha o hábito de se lançar em longas tiradas sobre diversos tópicos (às vezes não relacionados ao material discutido), contando piadas, anedotas e histórias de todos os tipos, muitas das quais bastante divertidas. Foi no seminário que escutei a parábola que mencionei no prefácio: um bêbado pode não saber qual número é maior, 2/3 ou 3/5, mas sabe que é muito melhor ter 2 garrafas de vodca para 3 pessoas do que 3 garrafas para 5 pessoas. Uma das habilidades de Gelfand era sua capacidade de reformular as perguntas de outras pessoas de tal maneira que as respostas se tornavam óbvias.

Outra anedota que ele gostava de contar envolvia o telégrafo sem fio: "No início do século XX, alguém pergunta para um físico numa festa: você pode me explicar como funciona? O físico responde que é muito simples. Primeiro, você tem de entender como o telégrafo comum, com fio, funciona: imagine um cachorro com a cabeça em Londres e o rabo em Paris. Você puxa o rabo em Paris e o cachorro late em Londres. O telégrafo sem fio, afirma o físico, é a mesma coisa, mas sem o cachorro".

Depois de contar a piada e esperar o barulho da risada baixar (mesmo a daquelas pessoas na plateia que a tinham escutado muitas vezes), Gelfand dirigia sua atenção para qualquer problema de matemática que estava sendo discutido. Se ele achasse que a solução do problema exigia uma abordagem radicalmente nova, comentaria: “O que estou tentando dizer é que precisamos fazer isso sem um cachorro.”

Um recurso muitas vezes utilizado no seminário era nomear um *kontrol’nyj slushatel’*, um ouvinte de teste, geralmente um membro mais jovem da plateia, que devia repetir, em intervalos regulares, o que o palestrante estava dizendo. Se fosse considerado que o “ouvinte de teste” estava seguindo bem a palestra, isso significava que o palestrante estava fazendo um bom trabalho. Caso contrário, o palestrante tinha de falar mais devagar e explicar melhor o tópico. Ocasionalmente, Gelfand até ridicularizava um palestrante muito ininteligível e o substituía por outro membro da plateia (claro que Gelfand também debochava do ouvinte de teste). Tudo isso deixava o seminário muito divertido.

A maioria dos seminários ocorre num ritmo regular, com as pessoas da plateia escutando educadamente (e algumas talvez cochilando), bastante complacentes, polidas, ou simplesmente receosas de fazer perguntas ao palestrante, e talvez aprendendo pouco. Não resta dúvida de que o ritmo irregular e o caráter geralmente subversivo do seminário de Gelfand não só mantinham as pessoas acordadas (uma tarefa nada fácil dado que o seminário frequentemente durava até meia-noite), mas as estimulavam de maneira que os outros seminários simplesmente não conseguiam. Gelfand exigia muito de seus palestrantes. Eles trabalhavam duro, assim como ele. Independentemente do que se possa dizer a respeito do estilo de Gelfand, as pessoas jamais deixavam o seminário de mãos vazias.

No entanto, acho que um seminário como esse só podia existir numa sociedade totalitária como a da União Soviética. As pessoas estavam acostumadas ao tipo de poder e comportamento ditatorial exibido por Gelfand. Ele podia ser cruel com as pessoas, às vezes ofensivo. Não acho que muitas pessoas tolerariam esse tipo de tratamento no mundo ocidental. No entanto, na União Soviética, isso não era considerado incomum, e ninguém protestava (outro exemplo famoso, parecido com esse, era o seminário de Lev Landau sobre física teórica).

Quando comecei a frequentar o seminário, Vladimir Kazakov, jovem físico, apresentava uma série de palestras sobre seu trabalho a respeito dos assim chamados modelos de matriz. Kazakov utilizava métodos da física quântica, numa maneira nova de obter resultados profundos que os matemáticos não conseguiam obter por meio de métodos mais convencionais. Gelfand sempre se interessara por física quântica, e esse tópico desempenhara tradicionalmente um papel importante em seu seminário. Ele estava particularmente impressionado com o trabalho de Kazakov e o estava promovendo ativamente entre os matemáticos. Como muitas de suas presciências, essa se provou brilhante: alguns anos depois, o trabalho ficou famoso e badalado, levando a diversos avanços importantes tanto em física como em matemática.

Em suas palestras no seminário, Kazakov estava fazendo um esforço admirável para explicar suas ideias aos matemáticos. Gelfand era mais condescendente com ele do que o habitual, permitindo que Kazakov falasse sem interrupções por mais tempo do que os outros palestrantes.

Enquanto essas palestras prosseguiam, um novo artigo chegou, de John Harer e Don Zagier, no qual eles ofereceram uma bela solução para um problema muito difícil de análise combinatória.[6] Zagier tem a reputação de resolver problemas aparentemente espinhosos; ele também é muito rápido. O que se dizia era que a solução desse problema havia lhe consumido apenas seis meses, e ele sentia muito orgulho disso. No seminário seguinte, enquanto Kazakov continuava sua apresentação, Gelfand pediu-lhe para resolver o problema de Harer–Zagier usando seu trabalho de modelos de matriz. Gelfand percebeu que os métodos de Kazakov podiam ser úteis para resolver esse tipo de problema, e tinha razão. Kazakov ignorava o artigo de Harer–Zagier – aquela era a primeira vez que ele ouvia falar a respeito da questão. Diante do quadro-negro, Kazakov pensou durante dois minutos e, em seguida, escreveu o lagrangiano de uma teoria quântica de campos que levaria à resposta por meio dos seus métodos.

Todos os presentes ficaram espantados. Menos Gelfand. De modo inocente, ele perguntou a Kazakov: "Volodya, há quantos anos você vem trabalhando nesse tópico?"

"Não tenho certeza, Israel Moiseevich, talvez seis anos, aproximadamente."

"Então você precisou de seis anos mais dois minutos, e Don Zagier precisou de seis meses. Hmmm… Você percebe o quanto ele é melhor?"

Essa era uma "piada" suave em comparação com algumas outras. Você tinha de ser forte para sobreviver nesse ambiente. Infelizmente, alguns palestrantes levavam para o lado pessoal os comentários mordazes feitos em público, e isso lhes provocava muito sofrimento. No entanto, devo acrescentar que Gelfand sempre tinha língua afiada para os matemáticos mais velhos e consagrados, e era muito mais amável com os jovens, sobretudo os estudantes.

Gelfand costumava dizer que, no seminário, recebia bem todos os estudantes da graduação e todos os graduados de talento. Quanto aos professores, só os brilhantes. Gelfand entendia que, para manter a matéria em movimento, era muito importante preparar novas gerações de matemáticos, e ele sempre se cercava de jovens talentos. Eles também o mantinham jovem (ele continuou realizando pesquisas de ponta até quase completar 90 anos). Com frequência, convidava estudantes do ensino médio para o seminário e os acomodava na primeira fila, para ter certeza de que estavam seguindo o que estava acontecendo (claro que não eram estudantes comuns do ensino médio; muitos deles se tornaram matemáticos de renome mundial).

Segundo a opinião geral, Gelfand era muito generoso com seus alunos, e conversava com eles durante horas. Poucos professores fazem isso. Mas não era fácil ser seu aluno; ele oferecia uma espécie de amor áspero, e eles tinham de lidar com suas inúmeras idiossincrasias e seus hábitos ditatoriais. No entanto, minha impressão, a partir de conversas com muitos deles, é de que eles eram todos leais e sentiam que tinham uma dívida imensa com ele.

Eu não fui aluno de Gelfand – fui seu "aluno-mór", pois meus dois professores, Fuchs e Feigin (que ainda não estava na minha vida), eram, ao menos em parte, alunos de Gelfand. Por isso, sempre me considerei como integrante da "escola de matemática de Gelfand". Muito tempo depois, quando estávamos nos Estados Unidos, Gelfand me perguntou diretamente se eu me considerava parte dela, e, pela expressão de satisfação dele quando disse que sim, eu pude perceber o quão importante era para ele a questão da sua escola e o reconhecimento de quem fez parte dela.

Essa escola, da qual o seminário era o centro, sua janela para o mundo, tinha um impacto enorme não só sobre a matemática em Moscou, mas em todo o mundo. Matemáticos estrangeiros iam para a cidade apenas para se encontrar com Gelfand e participar do seu seminário, e muitos consideravam uma honra dar uma palestra ali.

A personalidade fascinante e exuberante de Gelfand desempenhou um papel importante na reputação do seminário. Alguns anos depois, ele ficou interessado em meu trabalho e me pediu para falar em seu seminário. Passei muitas horas conversando com ele, não só a respeito de matemática, mas sobre muitas outras coisas. Gelfand estava muito interessado na história da matemática e, em particular, do seu próprio legado. Lembro-me nitidamente, quando eu o visitei pela primeira vez em seu apartamento moscovita (eu tinha acabado de fazer 21 anos), de que ele me disse que se considerava o Mozart da matemática.

– A maioria dos compositores é lembrada por obras musicais específicas – Gelfand afirmou. – Mas, no caso de Mozart, não é assim. É a totalidade da sua obra que o torna um gênio. – Ele fez uma pausa e prosseguiu: – O mesmo acontece em relação ao meu trabalho matemático.

Pondo de lado algumas questões interessantes suscitadas por essa autoavaliação, acho que é, realmente, uma comparação apropriada. Embora Gelfand não demonstrasse nenhuma célebre conjectura centenária (como o Último Teorema de Fermat), o efeito acumulativo de suas ideias matemáticas era incrível. Talvez o mais importante seja que Gelfand tinha um gosto excelente para a bela matemática, e também uma intuição perspicaz a respeito das áreas que eram mais interessantes e promissoras. Ele era como um oráculo que tinha o poder de prever as direções que a matemática tomaria.

Em uma matéria que estava ficando cada vez mais fraturada e repleta de especializações, ele era um dos últimos homens renascentistas remanescentes, capazes de construir pontes entre diversas áreas. Ele condensava a unidade da matemática. Ao contrário da maioria dos seminários, que enfocam uma única área, no seminário de Gelfand era possível perceber como todas essas partes distintas se encaixam. E é por isso que todos nós nos reuníamos todas as segundas-feiras à noite, no 14o andar do edifício principal da MGU, e esperávamos ansiosamente a palavra do mestre.

Foi para esse homem impressionante que Fuchs sugeriu que eu apresentasse meu primeiro artigo de matemática. A revista de Gelfand, *Functional Analysis and Applications,* tinha quatro edições por ano, com cerca de cem páginas cada uma (um número desprezível para uma revista como aquela, mas o editor se recusava a dar mais espaço). Era uma publicação tida em alta consideração em todo o mundo. Era traduzida para o inglês, e diversas bibliotecas científicas do mundo a assinavam.

Era muito difícil ter um artigo publicado nessa revista, em parte por causa da limitação severa do número de páginas. De fato, eram publicados dois tipos de artigos: artigos de pesquisa, cada um geralmente com dez a quinze páginas, contendo demonstrações detalhadas; e de comunicações curtas, em que somente os resultados eram apresentados, sem demonstrações. As comunicações não podiam ter mais de duas páginas. Na teoria, cada um desses artigos curtos devia ser acompanhado por um artigo detalhado, contendo todas as demonstrações, mas, na realidade, muito frequentemente isso não acontecia, porque publicar um artigo mais longo era extremamente difícil. De fato, era quase impossível para um matemático da URSS publicar no exterior (ele precisava conseguir todos os tipos de certificados de segurança, o que podia demorar facilmente mais de um ano e exigir muito esforço). Por outro lado, na União Soviética, a quantidade de publicações especializadas em matemática, considerando a quantidade de matemáticos existentes no país, era muito pequena. Infelizmente, muitas delas eram controladas por grupos que não permitiam que estranhos publicassem, e o antissemitismo também predominava em algumas delas.

Por causa de tudo isso, certa subcultura de artigos de matemática emergiu na URSS, o que passou a ser conhecido como a "tradição russa" referente a artigos matemáticos: redação extremamente concisa, com poucos detalhes fornecidos. O que muitos matemáticos fora da União Soviética não atinaram era que isso acontecia em grande medida por necessidade, e não por escolha. Era aquele tipo de comunicação curta que Fuchs estava tencionando para o meu primeiro artigo.

Cada artigo apresentado para a *Functional Analysis and Applications*, incluindo as comunicações curtas, tinha de ser examinado e aprovado por Gelfand. Se ele gostasse, então deixaria o artigo passar pelo processo-padrão de revisão por pares. Isso significava que, para meu artigo ser levado em consideração, eu tinha de me encontrar pessoalmente com Israel Moiseevich. Assim, antes de um dos primeiros seminários do semestre do outono de 1986, Fuchs me apresentou a Gelfand.

Gelfand apertou minha mão, sorriu e disse:

– Muito prazer. Eu ouvi falar de você.

Fiquei totalmente deslumbrado. Podia jurar que via uma auréola em torno da cabeça de Gelfand.

Então, Gelfand se virou para Fuchs e lhe pediu para ver meu artigo.

Gelfand começou a virar as páginas. Eram cinco, no total, que datilografei impecavelmente (e lentamente, com dois dedos) numa máquina de escrever que peguei emprestada em Kerosinka. Em seguida, eu havia inserido as fórmulas à mão.

– Interessante – Gelfand afirmou, em tom de aprovação, e, em seguida, virou-se para Fuchs:

– Mas por que isso é importante?

Fuchs começou a explicar algo a respeito de discriminantes de polinômios de grau *n*, com raízes distintas, e como meu resultado podia ser utilizado para descrever a topologia da fibra do discriminante, e… Gelfand o interrompeu:

– Mitya – ele disse, usando o diminutivo do nome de Fuchs –, você sabe quantos assinantes tem a revista?

– Não, Israel Moiseevich, não sei.

– Mais de mil. – Era uma quantidade bem grande, considerando como a revista era especializada. – Não posso enviá-lo com cada exemplar, para você explicar a cada assinante o motivo pelo qual esse resultado é bom, posso?

Fuchs fez um gesto negativo com a cabeça.

– Isso tem de ser dito claramente no artigo, OK? – Gelfand falou tudo isso para Fuchs, como se tudo fosse culpa *dele*. Então, disse para nós dois: – De qualquer forma, o artigo parece bom para mim.

Em seguida, Gelfand voltou a sorrir e se afastou para conversar com outra pessoa.

Fuchs esperou até Gelfand estar fora do alcance da sua voz e disse para mim:

– Não se preocupe com isso. Ele só quis impressioná-lo.

E tinha conseguido.

– Temos apenas que incluir um parágrafo com esse objetivo no começo do artigo, e, depois disso, ele provavelmente vai publicá-lo – concluiu Fuchs.

Aquele era o melhor resultado possível. Após acrescentar o parágrafo requerido por Gelfand, apresentei oficialmente o artigo e, no fim, ele foi publicado.[7] Com isso, meu primeiro projeto em matemática estava completo. Superei meu primeiro desafio e estava no início de uma trajetória que me levaria ao mundo mágico da matemática moderna.

Esse é o mundo que quero compartilhar com vocês.

*Também vale notar que Gelfand não foi eleito membro pleno da Academia de Ciências da URSS até meados dos anos 1980 porque a seção de matemática da Academia foi controlada durante décadas pelo diretor do Instituto de Matemática Steklov de Moscou, Ivan Matveevich Vinogradov, apelidado de o “antissemita em comando da URSS”. Vinogradov tinha posto em prática políticas antissemitas draconianas na Academia e no Instituto Steklov, que ficaram sob seu controle por quase cinquenta anos.

Capítulo 7

A Teoria da Grande Unificação

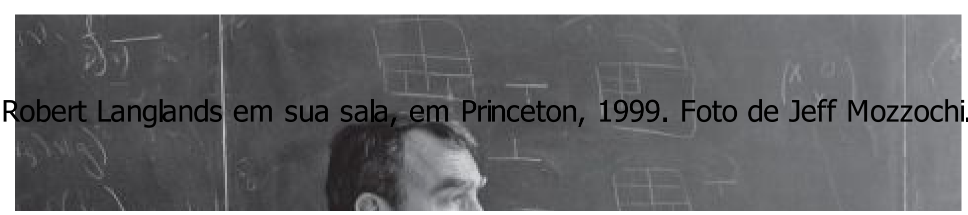
A solução do primeiro problema era minha iniciação no templo da matemática. Um tanto acidentalmente, o próximo projeto matemático que realizei com Fuchs levou-me ao meio do Programa de Langlands, uma das teorias matemáticas mais profundas e mais estimulantes surgidas nos últimos cinquenta anos. Falarei a seguir sobre o meu projeto, mas meu objetivo neste livro é descrever muito mais do que minha própria experiência. É oferecer uma noção da matemática moderna, para mostrar que ela envolve realmente originalidade, imaginação e *insights* inovadores. E o Programa de Langlands é um grande exemplo disso. Gosto de pensar sobre ele como a Teoria da Grande Unificação da Matemática, pois revela e destaca os padrões misteriosos compartilhados por distintas áreas da matemática e, portanto, aponta para conexões profundas e inesperadas entre elas.

A matemática consiste de inúmeros subcampos. Muitas vezes, parecem continentes distintos, com os matemáticos que trabalham nesses subcampos falando línguas diferentes. É por isso que a ideia de "unificação", juntando as teorias provenientes desses diversos campos e constatando que são todas parte de uma narrativa única, é tão poderosa. É como se você percebesse de repente que é capaz de entender outra língua, que você tentara desesperadamente aprender sem muito sucesso.

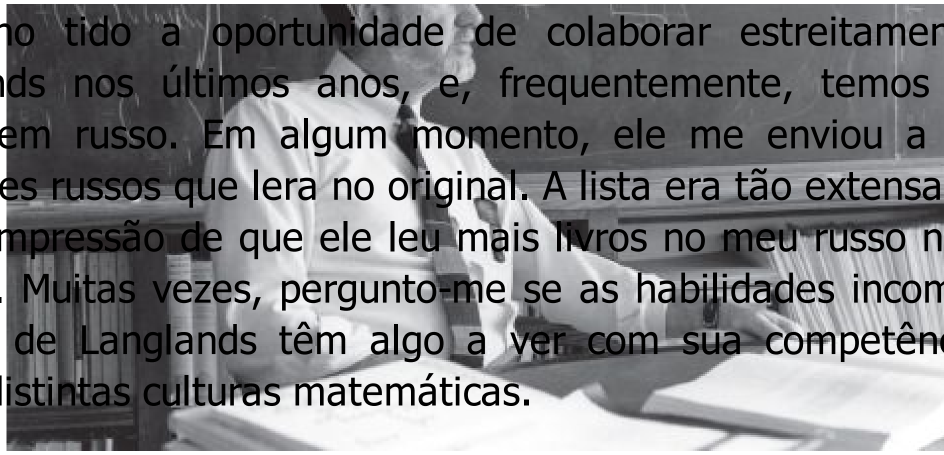
É proveitoso pensar a respeito da matemática como um todo, como um quebra-cabeça gigante, em que ninguém conhece a aparência da imagem final. Solucionar esse quebra-cabeça é um empreendimento coletivo de milhares de pessoas. Elas trabalham em grupos: os algebristas, os teóricos dos números, os ômetras etc. Cada grupo tem sido capaz de criar uma “ilhota” da visão geral, mas, ao longo da maior parte da história da matemática, tem sido difícil perceber como essas ilhotas se unirão algum dia. Em consequência, a maioria das pessoas trabalha na expansão do número dessas ilhas do quebra-cabeça. De vez em quando, porém, alguém aparece e enxerga um modo de ligá-las. Quando isso acontece, emergem características importantes da visão geral, o que dá um novo sentido aos campos individuais.

Foi isso que Robert Langlands fez, mas sua ambição era maior do que simplesmente unir algumas ilhas. Em vez disso, o Programa de Langlands, que ele iniciou no final da década de 1960, tornou-se uma tentativa de descobrir o mecanismo pelo qual podemos construir pontes entre diversas ilhas, independentemente de quão desconectadas elas possam parecer.

Atualmente, Langlands é professor emérito de matemática do Instituto de Estudos Avançados de Princeton, onde ocupa a sala que pertenceu a Albert Einstein. Homem de talento e visão incríveis, nasceu em 1936 e cresceu numa cidadezinha perto de Vancouver; seus pais tinham um negócio de madeira. Uma das coisas notáveis a respeito de Langlands é sua fluência em diversas línguas: inglês, francês, alemão, russo e turco, ainda que não falasse nenhuma língua além do inglês antes de ingressar na faculdade.[1]



Robert Langlands em sua sala, em Princeton, 1999. Foto de Jeff Mozzochi.



Tenho tido a oportunidade de colaborar estreitamente com Langlands nos últimos anos, e, frequentemente, temos trocado cartas em russo. Em algum momento, ele me enviou a lista de escritores russos que lera no original. A lista era tão extensa que me deu a impressão de que ele leu mais livros no meu russo nativo do que eu. Muitas vezes, pergunto-me se as habilidades incomuns em línguas de Langlands têm algo a ver com sua competência para reunir distintas culturas matemáticas.

O ponto principal do Programa de Langlands é o conceito de simetria, que já é familiar para nós. Falamos a respeito de simetria em geometria: por exemplo, qualquer rotação é uma simetria de uma mesa redonda. Nosso estudo dessas simetrias nos levou à ideia de um grupo. Então, vimos que os grupos aparecem em matemática com aparências distintas: como grupos de rotações, grupos de tranças etc. Também vimos que ajudaram na classificação das partículas elementares e na predição da existência dos quarks. Os grupos que são pertinentes ao Programa de Langlands aparecem no estudo de números.

Para explicar isso, temos de falar primeiro acerca dos números que encontramos em nosso cotidiano. Cada um de nós nasceu num ano específico, vive numa casa que possui um número específico na rua, tem um número de telefone, dispõe de uma senha para acessar a conta bancária no caixa eletrônico etc. Todos esses números possuem algo em comum: cada um deles é obtido adicionando o número 1 a si próprio, um determinado número de vezes: 1 + 1 = 2, 1 + 1 + 1 = 3, e assim por diante. Eles são denominados números naturais.

Também temos o número 0, e os números negativos: –1, –2, –3 … Como discutimos no capítulo 5, esses números são conhecidos pelo nome de "números inteiros". Assim, um número inteiro é um número natural, o número 0, ou o negativo do número natural.

Também nos deparamos com números um pouco mais gerais. Um preço, em dólares e centavos, é muitas vezes representado dessa maneira: US$ 2,59, significando dois dólares e cinquenta e nove centavos. É igual a 2 mais o quociente de 59/100 ou 59 vezes 1/100. Nesse caso, 1/100 significa a quantidade que, sendo adicionada a si mesma 100 vezes, dá-nos 1. Os números desse tipo são denominados números racionais, ou frações.

Um bom exemplo de um número racional é um quarto; matematicamente, ele é representado pela fração 1/4. Em um amplo sentido, para dois números inteiros quaisquer, *m* e *n*, podemos formar a fração *m*/*n*. Se *m* e *n* tiverem um divisor comum, digamos *d* (isto é, *m* = *dm'* e *n* = *dn'*), então poderemos eliminar *d* e escrever *m'*/*n'* em vez de *m*/*n.* Por exemplo, 1/4 também pode ser representado como 25/100, o que explica por que os norte-americanos podem dizer que um quarto é a mesma coisa que 25 centavos de dólar.

A grande maioria dos números com que nos deparamos em nossas situações cotidianas diz respeito a essas frações, ou números racionais. No entanto, também há números que não são racionais. Um exemplo é a raiz quadrada de 2, que anotamos da seguinte maneira:

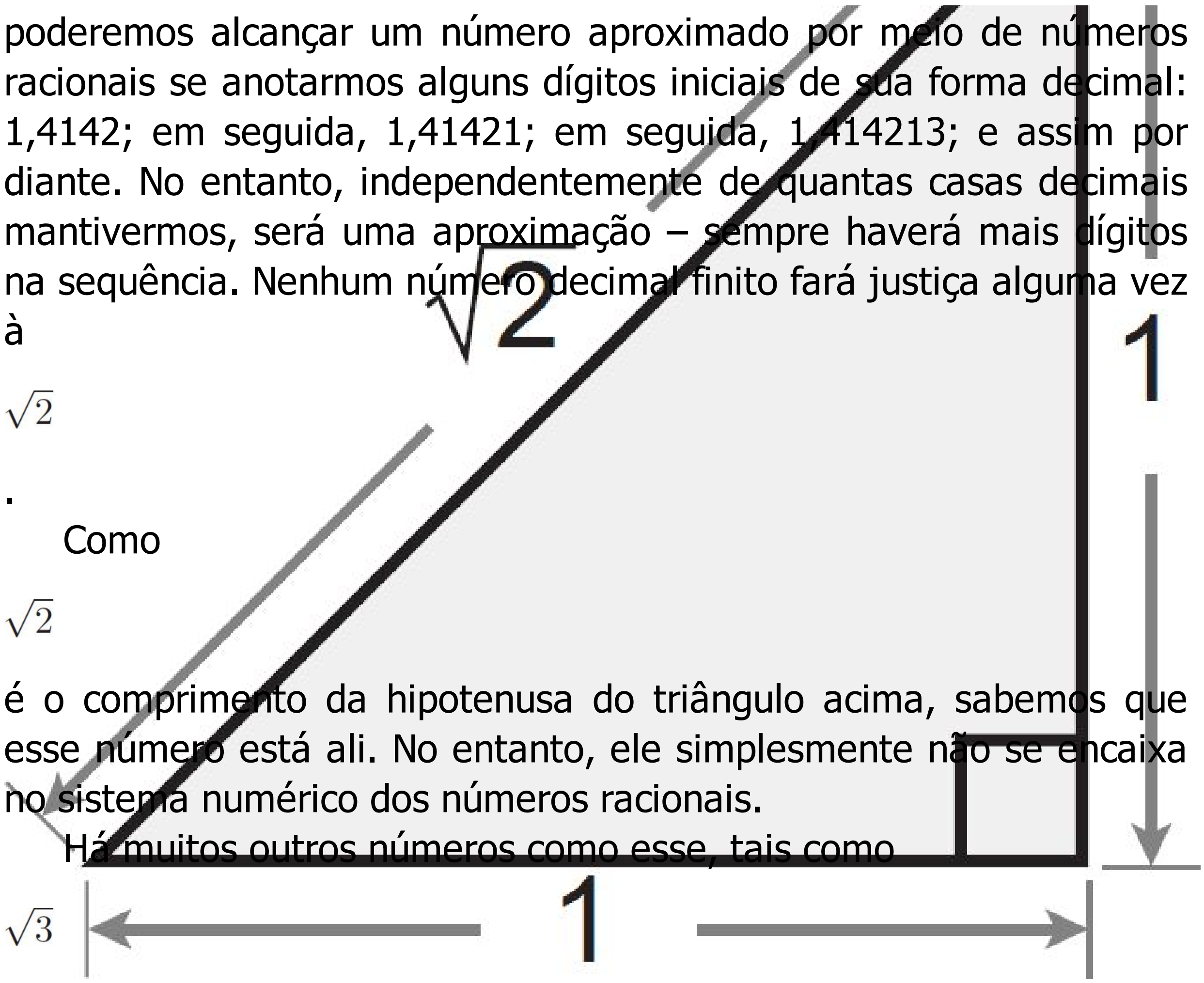
$$\sqrt{2}$$

. Este é o número cujo quadrado é igual a 2. Geometricamente,

$$\sqrt{2}$$

é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos de comprimento igual a 1.

Constata-se que não podemos representar esse número como *m/n,* onde *m* e *n* são dois números naturais.[2] No entanto,



poderemos alcançar um número aproximado por meio de números racionais se anotarmos alguns dígitos iniciais de sua forma decimal: 1,4142; em seguida, 1,41421; em seguida, 1,414213; e assim por diante. No entanto, independentemente de quantas casas decimais mantivermos, será uma aproximação – sempre haverá mais dígitos na sequência. Nenhum número decimal finito fará justiça alguma vez à

$\sqrt{2}$

.

Como

$\sqrt{2}$

é o comprimento da hipotenusa do triângulo acima, sabemos que esse número está ali. No entanto, ele simplesmente não se encaixa no sistema numérico dos números racionais.

Há muitos outros números como esse, tais como

$\sqrt{3}$

ou a raiz cúbica de 2. Precisamos desenvolver uma maneira sistemática de adicionar esses números aos racionais. Pense sobre os números racionais como uma xícara de chá. Podemos beber o chá sozinho, mas nossa experiência pode melhorar se misturarmos açúcar, leite, mel, diversas especiarias – e esses são como os números

$\sqrt{2}$

,

$\sqrt{3}$

, etc.

Vamos tentar introduzir na mistura

$\sqrt{2}$

. Será o equivalente a adicionar um cubo de açúcar ao nosso chá. Assim, deixamos cair

$\sqrt{2}$

nos números racionais e vemos que tipo de sistema numérico obtemos. Sem dúvida, queremos ser capazes de multiplicar os números dentro desse novo sistema; assim, temos de incluir todos os números que são produtos de números racionais e

$\sqrt{2}$

. Eles apresentam a forma $\frac{k}{l}\sqrt{2}$. Dessa maneira, nosso sistema numérico deve incluir todas as trações $\frac{m}{n}$ (esses são os números racionais) e todos os números da forma $\frac{k}{l}\sqrt{2}$. No entanto, também queremos ser capazes de somá-los; assim, também temos de incluir as somas

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\sqrt{2}.$$

A coleção de todos os números dessa forma já está "autocontida", no sentido de que podemos realizar todas as operações comuns em relação a eles – adição, subtração, multiplicação e divisão –, e o resultado também será um número da mesma forma.[3] Esse é a nossa xícara de chá com um cubo de açúcar misturado completamente na bebida.

Acontece que esse novo sistema numérico tem uma propriedade oculta que os números racionais não possuíam. Ela será nosso portão de entrada para o mundo mágico dos números. Isto é, descobrimos que esse sistema numérico possui simetrias.

Por "simetria", quero dizer uma regra que atribui um novo número a qualquer outro que escolhemos. Em outras palavras, uma determinada simetria transforma cada número em outro número do mesmo sistema numérico. Diremos que uma simetria é uma regra pela qual cada número “corresponde” a algum outro número. Essa regra deve ser compatível com as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. No entanto, não é evidente por que devemos nos preocupar com as simetrias de um sistema numérico. Sejam pacientes comigo e vocês verão o motivo em breve.

Nosso sistema numérico possui a simetria identidade, a regra pela qual cada número corresponde para si mesmo. É como a rotação de 0 grau de uma mesa, em que cada ponto corresponde para si mesmo.

Acontece que nosso sistema numérico também possui uma simetria não trivial. Para explicar o que é isso, observemos que

$$\sqrt{2}$$

é uma solução da equação $x^2 = 2$. De fato, se substituirmos

$$\sqrt{2}$$

por x, obtemos uma igualdade. No entanto, na realidade, essa equação apresenta duas soluções: uma delas é

$$\sqrt{2}$$

, e a outra é

$$-\sqrt{2}$$

. E, de fato, adicionamos as duas aos números racionais quando construímos nosso novo sistema numérico. Trocando essas duas soluções, obtemos uma simetria desse sistema numérico.*

Para ilustrar isso de maneira mais completa com nossa analogia sobre a xícara de chá, vamos modificá-la um pouco. Digamos que deixemos cair um cubo de açúcar branco e um cubo de açúcar mascavo em nossa xícara e os misturemos com o chá. O primeiro é como

$\sqrt{2}$

e o segundo é como

$-\sqrt{2}$

. Evidentemente, trocá-los não alterará o chá resultante. Da mesma forma, trocar

$\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$

será a simetria de nosso sistema numérico.

Nessa troca, os números racionais permanecem inalterados.[4] Portanto, o numéro da forma $\frac{m}{n}+\frac{k}{l}\sqrt{2}$ irá para o numéro $\frac{m}{n}-\frac{k}{l}\sqrt{2}$. Em outras palavras, em cada número, alteramos simplesmente o sinal na frente de

$\sqrt{2}$

e deixamos igual todo o resto.[5]

Veja, nosso novo sistema numérico é como uma borboleta: os números $\frac{m}{n}+\frac{k}{l}\sqrt{2}$ são como as escamas dela, e a simetria que troca

$\sqrt{2}$

e $-\sqrt{2}$

é como a borboleta trocando suas asas.

Em um amplo sentido, podemos considerar outras equações na variável *x,* em vez de $x^2 = 2$; por exemplo, a equação cúbica $x^3 - x + 1 = 0$. Se as soluções dessa equação não são números racionais (como é o caso das equações acima), então podemos juntá-las aos números racionais. Também podemos juntar simultaneamente aos números racionais as soluções de diversas equações. Dessa maneira, obteremos sistemas numéricos distintos ou, como os matemáticos os denominam, *corpos numéricos.* A palavra "corpo" refere-se ao fato de que esse sistema numérico é fechado nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

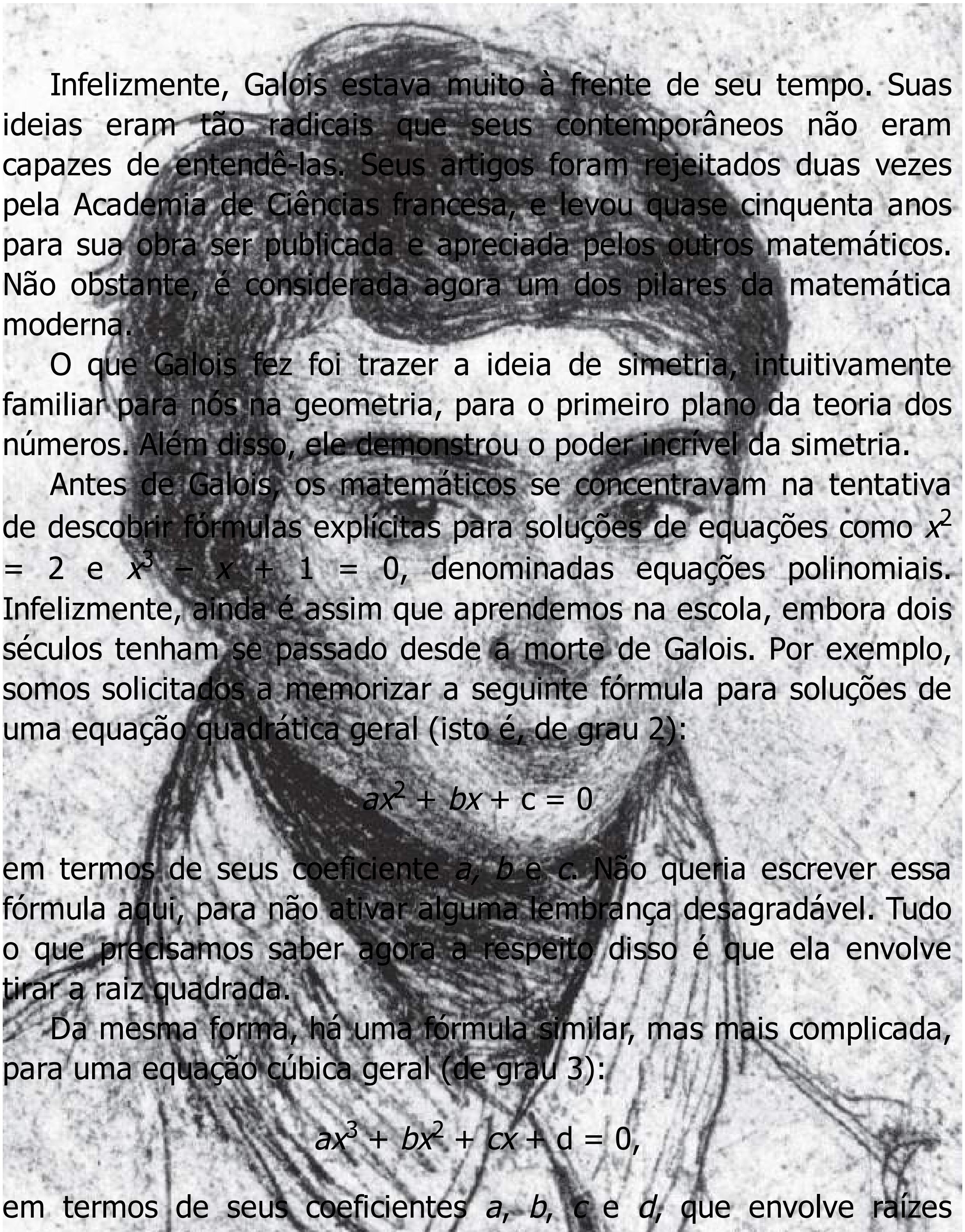
Exatamente como o corpo numérico obtido juntando

$\sqrt{2}$

, os corpos numéricos gerais possuem simetrias compatíveis com essas operações. As simetrias de um determinado corpo numérico podem ser aplicadas umas depois das outras (compostas mutuamente), exatamente como simetrias de um objeto geométrico. Então, não surpreende que essas simetrias formem um grupo. Esse grupo é denominado *Grupo de Galois* de um corpo numérico,[6] em homenagem a Évariste Galois, matemático francês.

A história de Galois é uma das mais românticas e fascinantes já contadas sobre matemáticos. Uma criança prodígio, ele realizou descobertas inovadoras muito jovem, mas morreu num duelo, aos 20 anos. Há diversas versões a respeito do motivo do duelo, que aconteceu em 31 de maio de 1832: algumas dizem que havia uma mulher envolvida, outras, que foi devido às suas atividades políticas. Sem dúvida, Galois era intransigente na manifestação de suas visões políticas e conseguiu incomodar muita gente durante sua curta vida.

Foi literalmente nas vésperas de sua morte que, escrevendo freneticamente num quarto iluminado pela luz de velas, no meio da noite, ele concluiu seu manuscrito, esboçando suas ideias a respeito das simetrias dos números. Em essência, era sua carta de amor para a humanidade, em que Galois compartilhava conosco suas fascinantes descobertas. De fato, os grupos de simetrias descobertos por Galois, que agora têm seu nome, são maravilhas do nosso mundo, como as pirâmides do Egito ou os jardins suspensos da Babilónia. A diferença é que não temos de viajar para outro continente, nem através do tempo, para encontrá-las. Estão bem na ponta de nossos dedos, onde quer que estejamos. E não é apenas sua beleza que é cativante, mas também sua alta potência em relação a aplicações no mundo real.



Infelizmente, Galois estava muito à frente de seu tempo. Suas ideias eram tão radicais que seus contemporâneos não eram capazes de entendê-las. Seus artigos foram rejeitados duas vezes pela Academia de Ciências francesa, e levou quase cinquenta anos para sua obra ser publicada e apreciada pelos outros matemáticos. Não obstante, é considerada agora um dos pilares da matemática moderna.

O que Galois fez foi trazer a ideia de simetria, intuitivamente familiar para nós na geometria, para o primeiro plano da teoria dos números. Além disso, ele demonstrou o poder incrível da simetria.

Antes de Galois, os matemáticos se concentravam na tentativa de descobrir fórmulas explícitas para soluções de equações como $x^2 = 2$ e $x^3 - x + 1 = 0$, denominadas equações polinomiais. Infelizmente, ainda é assim que aprendemos na escola, embora dois séculos tenham se passado desde a morte de Galois. Por exemplo, somos solicitados a memorizar a seguinte fórmula para soluções de uma equação quadrática geral (isto é, de grau 2):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

em termos de seus coeficiente *a*, *b* e *c*. Não queria escrever essa fórmula aqui, para não ativar alguma lembrança desagradável. Tudo o que precisamos saber agora a respeito disso é que ela envolve tirar a raiz quadrada.

Da mesma forma, há uma fórmula similar, mas mais complicada, para uma equação cúbica geral (de grau 3):

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

em termos de seus coeficientes *a*, *b*, *c* e *d*, que envolve raízes cúbicas. A tarefa de resolver uma equação polinomial em termos de radicais (isto é, raízes quadradas, raízes cúbicas etc.) está se tornando rapidamente cada vez mais complicada com o aumento do grau da equação.

A fórmula para as soluções de equações quadráticas já era conhecida por al-Khwarizmi, matemático persa, no século IX (a palavra "algebra" deriva da palavra "al-jabr", que aparece no título de seu livro). As fórmulas para soluções de equações cúbicas e quárticas (grau 4) foram descobertas na primeira metade do século XVI. Naturalmente, o próximo alvo era uma equação quíntica (de grau 5). Antes de Galois, diversos matemáticos tentaram desesperadamente, em vão, descobrir uma fórmula para suas soluções por quase trezentos anos. Galois percebeu que eles estavam formulando a pergunta errada. Em vez disso, ele afirmou, devemos nos concentrar no grupo de simetrias do corpo numérico obtido por meio do ajuntamento das soluções dessa equação relativa aos números racionais - isso é o que agora denominamos o Grupo de Galois.

A questão de descrever o Grupo de Galois acabou se revelando muito mais manejável do que a de escrever uma fórmula explícita para as soluções. Podemos dizer algo significativo a respeito desse grupo mesmo sem sabermos quais são as soluções. E a partir disso, então, podemos inferir informações importantes sobre as soluções. De fato, Galois foi capaz de demonstrar que uma fórmula para soluções em termos de radicais (isto é, raízes quadradas, raízes cúbicas etc.) existe se, e somente se, o Grupo de Galois correspondente possuir uma estrutura particularmente simples: é aquilo que os matemáticos agora denominam um grupo *solúvel.* Para equações quadráticas, cúbicas e quárticas, os grupos de Galois são sempre solúveis. Eis por que as soluções dessas equações podem ser escritas em termos de radicais. No entanto, Galois demonstrou que o grupo de simetrias de uma equação quíntica típica (ou uma equação de grau maior) não é solúvel. Isso implica imediatamente que não há fórmula para soluções dessas equações em termos de radicais.[7]

Não quero entrar em detalhes a respeito dessa demonstração, mas consideremos dois exemplos de grupos de Galois para dar uma ideia de como esses grupos se parecem. Já descrevemos o Grupo de Galois no caso da equação $x^2 = 2$. Essa equação possui duas soluções,

$\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$

, as quais juntamos aos números racionais. Então, o Grupo de Galois do corpo numérico resultante[8] consiste de dois elementos: a identidade e a simetria que troca

$\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$

.

Como nosso próximo exemplo, vamos considerar a equação cúbica escrita acima, e vamos supor que seus coeficientes são números racionais, mas todas as suas três soluções são irracionais. Então, construímos um novo corpo numérico juntando essas soluções aos números racionais. É como adicionar três ingredientes distintos à nossa xícara de chá: um cubo de açúcar, um pouco de leite e uma colher de mel. Em qualquer simetria desse corpo numérico (a xícara de chá com a adição desses ingredientes), a equação cúbica não mudará, pois seus coeficientes são números racionais, preservados pelas simetrias. Portanto, cada solução da equação cúbica (um dos três ingredientes) necessariamente se moverá para outra solução. Essa observação nos permite descrever o Grupo de Galois de simetrias desse corpo numérico em termos de permutações das três soluções. O ponto principal é que obtemos essa descrição sem anotar nenhuma fórmula para as soluções.[9]

Da mesma forma, o Grupo de Galois de simetrias do corpo numérico obtido pelo ajuntamento de todas as soluções de uma equação polinomial arbitrária relativa aos números racionais também pode ser descrito em termos de permutações dessas soluções (haverá *n* soluções para uma equação polinomial de grau *n* cujas soluções são todas distintas e não racionais). Dessa maneira, podemos inferir muitas informações a respeito da equação sem enunciar suas soluções em termos de coeficientes.[10]

A obra de Galois é um grande exemplo do poder de um *insight* matemático. Galois não resolveu o problema de descobrir uma fórmula para soluções de equações polinomiais no sentido em que era entendido. Ele reconfigurou o problema. Ele o reformulou, considerou-o sob uma ótica totalmente diferente. E seu brilhante *insight* mudou para sempre a maneira pela qual as pessoas pensam a respeito de números e equações.

Cento e cinquenta anos depois, Langlands radicalizou ainda mais essas ideias. Em 1967, ele propôs *insights* revolucionários, ligando a teoria do Grupo de Galois a outra área da matemática, denominada análise harmónica. Essas duas áreas, que parecem estar a anos-luz de distância, acabaram se revelando estreitamente relacionadas. Langlands, na ocasião com pouco mais de 30 anos, resumiu essas ideias numa carta para o eminente matemático André Weil. Na época, cópias circularam amplamente entre os matemáticos.[11] A apresentação é notável por sua sobriedade:[12]

> Professor Weil: Em resposta ao seu convite para comparecer e falar, escrevi a carta anexa. Depois de escrevê-la, percebi que dificilmente havia um enunciado nela do qual eu tivesse certeza. Se o senhor estiver disposto a lê-la como pura especulação, apreciaria o fato; caso contrário, tenho certeza de que o senhor tem uma lixeira à mão.

O que veio a seguir foi o início de uma teoria inovadora, que mudou para sempre a maneira pela qual pensamos a matemática. Assim, nasceu o Programa de Langlands.

Diversas gerações de matemáticos dedicaram suas vidas a resolver os problemas propostos por Langlands. O que havia neles que os inspiraram tanto? A resposta será dada no próximo capítulo.

[*]Note que aqui e abaixo utilizo um sinal de menos (um travessão) para representar números negativos, em vez de um hífen. Isso obedece à notação matemática padrão. De fato, não há realmente nenhuma diferença entre os dois, pois $-N = 0 - N$.

Capítulo 8

Números mágicos

No capítulo 2, ao falarmos pela primeira vez de simetrias, vimos que as representações de um grupo denominado *SU*(3) controlam o comportamento das partículas elementares. As representações de um grupo também são o foco do Programa de Langlands, mas, desta vez, envolvem o Grupo de Galois de simetrias de um corpo numérico do tipo discutido no capítulo anterior. Acontece que essas representações formam o "código-fonte" de um corpo numérico, contendo toda a informação básica a respeito dos números.

A ideia incrível de Langlands foi que podemos extrair essa informação de objetos de natureza completamente distinta: as assim chamadas funções automorfas, que provêm de outro campo da matemática, denominado análise harmônica. As raízes da análise harmônica se encontram no estudo dos modos harmônicos, que são as ondas sonoras básicas cujas frequências são múltiplos umas das outras. A ideia é que uma onda sonora geral é uma superposição de harmônicos, da mesma forma que o som de uma sinfonia é uma superposição de harmônicos correspondentes às notas tocadas pelos diversos instrumentos. Matematicamente, significa enunciar uma determinada função como uma superposição de funções que descrevem harmônicos, tais como as conhecidas funções trigonométricas *seno* e *cosseno.* As funções automorfas são versões mais sofisticadas desses harmônicos mais conhecidos. Há métodos analíticos de grande eficácia para a realização de cálculos por meio dessas funções automorfas. E o surpreendente *insight* de Langlands foi que podemos utilizar essas funções para aprender questões muito mais difíceis relativas à teoria dos números. Dessa maneira, descobrimos uma harmonia oculta dos números.

No prefácio, afirmei que uma das principais funções da matemática é o ordenamento das informações, ou, como Langlands afirma, "criar ordem a partir do caos aparente".[1] A ideia de Langlands é tão poderosa porque ajuda a organizar os dados aparentemente caóticos da teoria dos números em padrões regulares, repletos de simetria e harmonia.

Se pensarmos nos distintos campos da matemática como continentes, então a teoria dos números seria como a América do Norte, e a análise harmônica, como a Europa. Ao longo dos anos, o tempo de viagem entre esses dois continentes diminuiu. Antes eram dias de barco, e agora são algumas horas de avião. No entanto, imagine que uma nova tecnologia fosse criada, permitindo o transporte instantâneo de qualquer lugar da América do Norte para algum lugar na Europa. Esse seria o equivalente das conexões descobertas por Langlands.

Agora, descreverei uma dessas conexões inovadoras, que está intimamente relacionada com o Último Teorema de Fermat, do qual falamos no capítulo 6.

O Último Teorema de Fermat é enganosamente simples de enunciar. Afirma que não existem números naturais x, y e z para resolver a equação

$$x^n + y^n = z^n,$$

se n for maior que 2.

Como escrevi, esse resultado foi conjecturado por Pierre de Fermat, matemático francês, há mais de 350 anos, em 1637. Ele deixou uma anotação em um antigo livro que estava lendo, afirmando que descobrira uma demonstração “verdadeiramente maravilhosa” desse enunciado, mas a margem da página era “estreita demais para contê-la”. Chame-a de uma demonstração ao estilo Twitter do século XVII: “Descobri uma demonstração maravilhosa desse teorema, mas, infelizmente, não posso escrevê-la aqui, pois tem mais do que cento e quarenta caract…” – desculpe, o espaço acabou.

Resta pouca dúvida de que Fermat estava errado. Foram necessários mais de 350 anos para se descobrir uma demonstração real, que é bastante complicada. Há dois passos principais: primeiro, em 1986, Ken Ribet demonstrou que o Último Teorema de Fermat envolve a assim chamada conjectura de Shimura–Taniyama–Weil.

(Talvez eu devesse notar que uma conjectura matemática é um enunciado que esperamos que seja válido, mas para o qual ainda não conhecemos uma demonstração. Depois da descoberta de uma demonstração, a conjectura se torna um teorema.[2])

O que Ken Ribet demonstrou foi que existem números naturais *x, y, z* que resolver a equação de Fermat; então, utilizando esses números, podemos construir uma determinada equação cúbica, que apresenta uma propriedade excluída pela conjectura Shimura–Taniyama–Weil (explicarei a seguir qual é essa equação e qual é essa propriedade). Se soubermos que a conjectura de Shimura–Taniyama–Weil é válida, essa equação não poderá existir. Mas então os números *x, y, z* que resolviam a equação de Fermat também não podem existir.[3]

Façamos uma breve pausa e revisemos a lógica desse argumento mais uma vez. A fim de demonstrar o Último Teorema de Fermat, assumimos que o argumento é falso; isto é, supomos que existem números naturais *x, y z,* de modo que a equação de Fermat seja satisfeita. Então, associamos a esses números uma equação cúbica, que revela ter certa propriedade indesejável. A conjectura de Shimura–Taniyama–Weil nos afirma que essa equação *não pode* *existir.* Mas então esses números *x, y, z* também não podem existir. Portanto, não pode haver soluções para a equação de Fermat. Assim, o Último Teorema de Fermat é verdadeiro! De forma esquemática, o fluxograma desse argumento possui a seguinte aparência (abreviamos “Último Teorema de Fermat” como UTF, e “conjectura de Shimura–Taniyama–Weil” como CSTW):

$\boxed{\text{UFT é falso}} \Longrightarrow \boxed{\text{existem } x, y, z \text{ que resolvem a equação}} \Longrightarrow \boxed{\text{Uma equação cúbica}}$

$\boxed{\text{CSTW}} \Longrightarrow \boxed{\text{essa equação cúbica não pode existir}} \Longrightarrow \boxed{x, y, z \text{ que resolvem a equação não podem existir}}$

Esse tipo de argumento é denominado *prova por contradição.* Começamos com o enunciado, que é oposto àquilo que estamos tentando demonstrar (em nosso caso, o enunciado de que existem números naturais *x, y, z* que resolvem a equação de Fermat, que é o oposto do que queremos demonstrar). Se, por meio de uma cadeia de implicações, chegarmos a um enunciado que é demonstravelmente falso (em nosso caso, a existência da equação cúbica que é proibida pela conjectura de Shimura–Taniyama–Weil), então concluiremos que o enunciado pelo qual começamos é falso. Portanto, o enunciado que queríamos demonstrar (o Último Teorema de Fermat) é verdadeiro.

O que resta então para consolidar o Último Teorema de Fermat é demonstrar que a conjectura de Shimura–Taniyama–Weil é verdadeira. Depois que isso foi entendido (em 1986, após o trabalho de Ribet), a busca era por uma demonstração da conjectura de Shimura–Taniyama–Weil.

Diversas demonstrações foram divulgadas ao longo dos anos, mas as análises subsequentes revelaram que essas demonstrações continham erros ou lacunas. Em 1993, Andrew Wiles sustentou que tinha demonstrado a conjectura, mas, alguns meses depois, descobriu-se que havia uma lacuna em sua demonstração. Por um tempo, pareceu que sua demonstração seria lembrada ao lado de diversas outras “não demonstrações” célebres, em que lacunas eram achadas, mas nunca fechadas.

Felizmente, um ano depois, Wiles foi capaz de fechar a lacuna com a ajuda de outro matemático, Richard Taylor. Juntos, eles concluíram a demonstração.[4] Num belo documentário a respeito do Último Teorema de Fermat, Wiles se emociona quando relata esse momento, e só podemos imaginar como deve ter sido visceral essa experiência para ele.

Portanto, a conjectura de Shimura–Taniyama–Weil é um resultado-chave na demonstração do Último Teorema de Fermat. Pode também ser visto como um caso especial do Programa de Langlands e, portanto, fornece uma excelente ilustração das conexões inesperadas previstas por ele.

A conjectura de Shimura–Taniyama–Weil é um enunciado sobre determinadas equações. De fato, grande parte da matemática envolve a solução de equações. Queremos saber se uma determinada equação possui uma solução num determinado domínio; em caso positivo, podemos achar uma? Se existem diversas soluções, quantas são? Por que algumas equações apresentam soluções e outras não?

No capítulo anterior, falamos de equações polinomiais de uma variável, como $x^2 = 2$. O Último Teorema de Fermat envolve uma equação de três variáveis: $x^n + y^n = z^n$. E a conjectura de Shimura–Taniyama–Weil envolve uma classe de equações algébricas sobre duas variáveis, como esta:

$$y^2 + y = x^3 - x^2.$$

Uma solução dessa equação é um par de números x, de modo que o lado esquerdo seja igual ao lado direito.

Mas que tipo de números queremos que x e y sejam? Há diversas alternativas: uma possibilidade é dizer que x e y são números naturais ou números inteiros. Outra é que são números racionais. Também podemos procurar soluções x e y que sejam números reais, ou até números complexos – discutiremos essa opção com mais detalhes no próximo capítulo.

Acontece que há mais uma alternativa, que é menos óbvia, mas igualmente importante: considere soluções x, y “módulo N” para alguns números naturais definidos N. Isso significa que procuraremos números inteiros x e y, de modo que o lado esquerdo seja igual ao lado direito, até um número que seja divisível por N.

Por exemplo, procuremos soluções módulo $N = 5$. Há uma solução óbvia $x = 0$, $y = 0$. E existem três outras soluções, um pouco menos óbvias: $x = 0$, $y = 4$ é uma solução módulo 5, pois o lado esquerdo é 20 e o lado direito é 0. A diferença entre os lados esquerdo e direito é 20, que é divisível por 5. Assim, essa é de fato uma solução da equação módulo 5. Por meio de um argumento similar, $x = 1$, $y = 0$ e $x = 1$, $y = 4$ também são soluções módulo 5.

No capítulo 2, já discutimos esse tipo de aritmética, quando falamos a respeito do grupo de rotações de uma mesa redonda. Vimos então que se fez uma adição de ângulos “módulo 360”. Quer dizer, se o resultado da adição de dois ângulos for maior que 360 graus, subtrairemos 360 desse resultado, para trazê-lo ao intervalo de 0 a 360. Por exemplo, a rotação de 450 graus é igual à rotação de 90 graus, pois 450 – 360 = 90.

Também nos deparamos com essa aritmética quando usamos o relógio. Se começarmos a trabalhar às 10h, e trabalharmos durante 8 horas, que horas terminaremos? Bem, 10 + 8 = 18; assim, uma coisa natural a dizer seria: “Terminaremos às 18h.” Na França, seria perfeitamente normal dizer isso, onde registram as horas como números de 0 a 24 (na realidade, não tão perfeitamente normal, pois, na França, um dia útil é, em geral, limitado a sete horas). No entanto, nos Estados Unidos, dizemos: “Terminaremos ás 6 da tarde.” Como obtemos 6 a partir de 18? Subtraímos 12 deste: 18 – 12 = 6.

Assim, empregamos a mesma ideia com horas como com ângulos. No primeiro caso, fazemos adição “módulo 360”. No segundo caso, fazemos adição "módulo 12".

Da mesma forma, podemos fazer adição modular para qualquer número natural N. Consideremos o conjunto de todos os números inteiros consecutivos entre 0 e $N - 1$,

$$\{0, 1, 2, \dots, N - 2, N - 1\}$$

Se $N = 12$, esse é o conjunto de horas possíveis. Em geral, a função do 12 é desempenhada pelo número N, de modo que não é 12 que nos leva de volta a 0, mas N.

Definimos a adição relativa ao conjunto desses números da mesma maneira que para as horas. Dados dois números quaisquer desse conjunto, nós os adicionamos e, se o resultado for maior que N, subtraímos N dele, para obter um número do mesmo conjunto. Essa operação coloca esse número num grupo. O elemento identidade é o número 0: adicioná-lo a qualquer outro número não o altera. De fato, temos $n + 0 = n$. E, para qualquer outro número n de nosso conjunto, seu "inverso aditivo" é $N - n$, pois $n + (N - n) = N$, que é igual a 0, de acordo com nossas regras.

Por exemplo, consideremos $N = 3$. Então, temos o conjunto $\{0, 1, 2\}$ e uma adição módulo 3. Por exemplo, temos

$$2 + 2 = 1 \text{ módulo } 3$$

nesse sistema, pois $2 + 2 = 4$, mas como $4 = 3 + 1$, o número 4 é igual a 1 módulo 3.

Assim, se alguém disser para você: "2 mais 2 é igual a 4", para indicar um fato bem estabelecido, você agora poderá afirmar (com um sorriso condescendente, se quiser): "Bem, na realidade, isso nem sempre é verdade." E ,se lhe pedirem para explicar, você poderá dizer: "Se você fizer adição módulo 3, então 2 mais 2 é igual a 1."

Dados dois números quaisquer do conjunto acima, também podemos multiplicá-los. O resultado pode não estar entre 0 e $N - 1$, mas haverá um número único nesse intervalo que diferirá do resultado da multiplicação por algo divisível por *N*. No entanto, em geral, o conjunto {1, 2, … , *N* – 1} não é necessariamente um grupo relacionado à multiplicação. Temos o elemento identidade: o número 1. Mas nem todo elemento possui o multiplicativo inverso módulo *N*. Isso acontecerá se, e somente se, *N* for um *número primo,* isto é, um número que não é divisível por qualquer outro número natural diferente de 1 e de si mesmo.[5]

Os primeiros números primos são 2, 3, 5, 7, 11, 13 etc. (é costume excluir o número 1 dessa lista). Mesmo os números naturais, exceto o 2, não são números primos, pois são divisíveis por 2, e 9 não é número primo, pois é divisível por 3. De fato, existem infinitos números primos – independentemente de quão grande seja um número primo, há outro que é ainda maior.[6] Os primos, devido ao fato de que são indivisíveis, são as partículas elementares do mundo dos números naturais; todos os outros números naturais, de fato, podem ser escritos de uma maneira única, como produto de números primos. Por exemplo, 60 = 2 · 2 · 3 · 5.

Fixemos um número primo. Como é de costume, nós o denotaremos por *p.* Então, consideremos o conjunto de todos os números inteiros consecutivos entre 0 e *p* – 1; isto é,

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots , p - 2, p - 1\}$$

E consideremos duas operações com eles: adição e multiplicação módulo *p*.

Como vimos acima, esse conjunto é um grupo sobre adição módulo *p*. O que é ainda mais notável é que, se removermos o número 0 e considerarmos o conjunto de números inteiros consecutivos entre 1 e *p* – 1, isto é, {0, 1, 2, … , *p* – 1}, obteremos um grupo relacionado à multiplicação módulo *p*. O elemento 1 é a identidade multiplicativa (isso é evidente), e eu sustento que qualquer número natural entre 1 e $p - 1$ possui um multiplicativo inverso.[7]

Por exemplo, se $p = 5$, verificamos que

$$2 \cdot 3 = 1 \text{ módulo } 5,$$

e

$$4 \cdot 4 = 1 \text{ módulo } 5$$

de modo que o multiplicativo inverso de 2 módulo 5 seja 3, e 4 seja seu próprio inverso módulo 5. Constata-se que, em geral, isso é verdadeiro.[8]

Em nosso cotidiano, estamos acostumados com números que são inteiros ou frações. Às vezes, utilizamos números como

$$\sqrt{2}$$

. Mas agora descobrimos um sistema numérico de natureza completamente distinta: o conjunto finito de números $\{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$, onde p é um número primo, sobre os quais temos as operações de adição e multiplicação módulo p. É denominado o *corpo finito com p elementos.* Esses corpos finitos formam um arquipélago importante no mundo dos números; um de cuja existência, infelizmente, a maioria de nós jamais teve conhecimento.

Embora esses sistemas numéricos pareçam muitos diferentes dos sistemas a que estamos acostumados, como os números racionais, eles possuem as mesmas propriedades salientes: são fechados em operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.[9] Portanto, tudo que podemos fazer com os números racionais também pode ser feito com esses corpos finitos e de aparência mais confusa.

Na realidade, eles não são mais tão esotéricos, tendo encontrado aplicações importantes – particularmente, em criptografia. Quando fazemos uma compra on-line e digitamos o número do cartão de crédito, esse número é criptografado por meio de aritmética módulo números primos, que é ditada por equações muito parecidas com as que mencionamos acima (veja a descrição do algoritmo de criptografia RSA na nota 7 do capítulo 14).

Voltemos à equação cúbica

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

que consideramos acima. Procuremos soluções dessa equação módulo p, para diversos números primos p. Por exemplo, vimos acima que são quatro soluções módulo 5. No entanto, note que as soluções módulo $p = 5$ não são necessariamente soluções modulares com outros números primos (por exemplo, $p = 7$ ou $p = 11$). Assim, essas soluções dependem do número primo p módulo pelo qual fazemos operações aritméticas.

A pergunta que vamos fazer agora é a seguinte: de que maneira o número de soluções dessa equação, considerando módulo p, depende de p? Para p pequeno, podemos calcular essas soluções explicitamente (talvez com a ajuda de um computador); assim, podemos realmente compilar uma tabelinha.

Os matemáticos sabiam que o número de soluções de uma equação desse tipo módulo p é aproximadamente igual a p. Denotemos o "déficit", ou seja, o número pelo qual o número real de soluções difere do número esperado (isto é, p), por a_p. Isso significa que o número de soluções da equação módulo p acima é igual a $p - a_p$. Os números a_p podem ser positivos ou negativos para um dado p. Por exemplo, constatamos acima que, para $p = 5$, há quatro soluções. Como $4 = 5 - 1$, obtemos que $a_5 = 1$.

Podemos descobrir os números a_p, para números primos pequenos, num computador. Aparentemente, eles são aleatórios. Não parece haver nenhuma fórmula ou regra natural que nos permita calculá-los. O que é pior: rapidamente, a computação se torna imensamente complicada.

Mas e se eu disser que havia de fato uma regra simples que gerou os números a_p todos de uma vez?

No caso de você estar se perguntando o que exatamente quero dizer aqui com uma "regra" que gerou esses números, consideremos uma sequência mais conhecida, os assim chamados números de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Chamados assim em homenagem ao matemático italiano que os apresentou em seu livro publicado em 1202 (no contexto de um problema de acasalamento de coelhos, ainda por cima), os números de Fibonacci são ubíquos na natureza: existem desde em arranjos de pétalas em flores até nos padrões da superfície de um abacaxi. Também possuem muitas aplicações, como o "retraçamento de Fibonacci" na análise técnica da negociação de ações.

Os números de Fibonacci são definidos da seguinte maneira: os primeiros dois são iguais a 1. Cada número depois deles é igual à soma dos dois números de Fibonacci precedentes. Por exemplo: 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 5 = 3 + 2, e assim por diante. Se denotarmos o enésimo número de Fibonacci por F_n, então teremos $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, e

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n > 2.$$

Em princípio, essa regra nos permite encontrar o enésimo número de Fibonacci para qualquer n. No entanto, para isso, temos primeiro que encontrar todos os números de Fibonacci F_i para i entre 1 e $n - 1$.

No entanto, constata-se que esses números também podem ser gerados da maneira seguinte. Considere a série

$$q + q(q + q^2) + q(q + q^2)^2 + q(q + q^2)^3 + q(q + q^2)^4 + \ldots$$

Em palavras, multiplicamos uma variável auxiliar q com a soma de todas as potências da expressão $(q + q^2)$. Se abrirmos os parênteses, obteremos uma série infinita, cujos primeiros termos são

$$q + q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 5q^5 + 8q^6 + 13q^7 + \dots$$

Por exemplo, calculemos o termo com q^3. Só pode ocorrer nas expressões q, $q(q + q^2)$ e $q(q + q^2)^2$ (de fato, todas as outras que aparecem na soma de definição, como $q(q + q^2)^3$, somente conterão potências de q maiores que 3). A primeira expressão não contém q^3, e cada uma das outras duas contém q^3 uma vez. Sua soma produz $2q^3$. De maneira semelhante, obtemos os outros termos da série.

Analisando os primeiros termos dessa série, constatamos que para n entre 1 e 7, o coeficiente em frente de q^n é o enésimo número de Fibonacci F_n. Por exemplo, temos o termo $13q^7$ e $F_7 = 13$. Constata-se que isso é verdadeiro para todo n. Por esse motivo, os matemáticos denominam essa série infinita a *função geradora* dos números de Fibonacci.

Essa função notável pode ser utilizada para fornecer uma fórmula eficaz de cálculo do enésimo número de Fibonacci sem qualquer referência aos números precedentes.[10] No entanto, mesmo pondo de lado os aspectos computacionais, podemos apreciar o valor agregado por essa função geradora: em vez de oferecer um procedimento recursivo autorreferente, ela contempla todos os números de Fibonacci simultaneamente.

Voltemos aos números a_p, calculando as soluções das equações cúbicas módulo números primos. Consideremos esses números como análogos dos números de Fibonacci (ignoremos o fato de que os números a_p são rotulados pelos números primos p, enquanto os números de Fibonacci F_n são rotulados por todos os números naturais n).

Parece quase inacreditável a existência de uma regra que gere esses números. No entanto, em 1954, Martin Eichler, matemático alemão, descobriu uma.[11] Considere a seguinte função geradora:

$$q(1-q)^2\,(1-q^{11})^2(1-q^2)^2(1-q^{22})^2(1-q^3)^2(1-q^{33})^2\ \ldots$$

Em palavras, isso é q vezes o produto dos fatores da forma $(1-q^a)^2$, com a seguindo a lista de números da forma n e $11n$, onde n = 1, 2, 3, … Vamos abrir os parênteses, utilizando as regras padrão:

$$(1-q)^2 = 1-2q+q^2,\ (1-q^{11})^2 = 1-2q^{11}+q^{22},\ \ldots$$

e, então, multipliquemos todos os fatores. Reunindo os termos, obtemos uma soma infinita, que começa da seguinte maneira:

$$q-2q^2-q^3+2q^4+q^5+2q^6-2q^7-2q^9-2q^{10}+q^{11}-2q^{12}+4q^{13}+\ldots$$

As elipses representam os termos com as potências de q maiores que 13. Embora essa série seja infinita, cada coeficiente é bem definido porque é determinado de modo finito por muitos fatores do produto acima. Denotemos o coeficiente em frente de q^m por b_m. Assim, temos $b_1 = 1$, $b_2 = -2$, $b_3 = -1$, $b_4 = 2$, $b_5 = 1$, etc. É fácil calculá-los manualmente ou num computador.

Um *insight* incrível de Eichler foi que, para todos os números primos p, o coeficiente b_p é igual a a_p. Em outras palavras, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, $a_5 = b_5$, $a_7 = b_7$, etc.

Verifiquemos, por exemplo, se isso é válido para $p = 5$. Nesse caso, considerando a função geradora, constatamos que o coeficiente na frente de q^5 é $b_5 = 1$. Por outro lado, vimos que nossa equação cúbica possui quatro soluções módulo $p = 5$. Portanto, $a_5 = 5 - 4 = 1$; assim, de fato, $a_5 = b_5$.

Começamos com o que parecia um problema de complexidade infinita: o cálculo de soluções da equação cúbica

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

módulo p, para todos os números primos p. E, no entanto, as informações desse problema estão contidas numa única linha:

$$q(1 - q)^2 (1 - q^{11})^2(1 - q^2)^2(1 - q^{22})^2(1 - q^3)2(1 - q^{33})^2 \ldots$$

Essa única linha é um código secreto contendo todas as informações das soluções da equação cúbica módulo todos os primos.

Uma analogia útil seria pensar na equação cúbica como um organismo biológico sofisticado, e em suas soluções como diversas características desse organismo. Sabemos que todas essas características estão codificadas na molécula de DNA. Da mesma forma, toda a complexidade da nossa equação cúbica acaba se revelando codificada numa função geradora, que é como o DNA dessa equação. Além disso, essa função é definida por meio de uma regra simples.

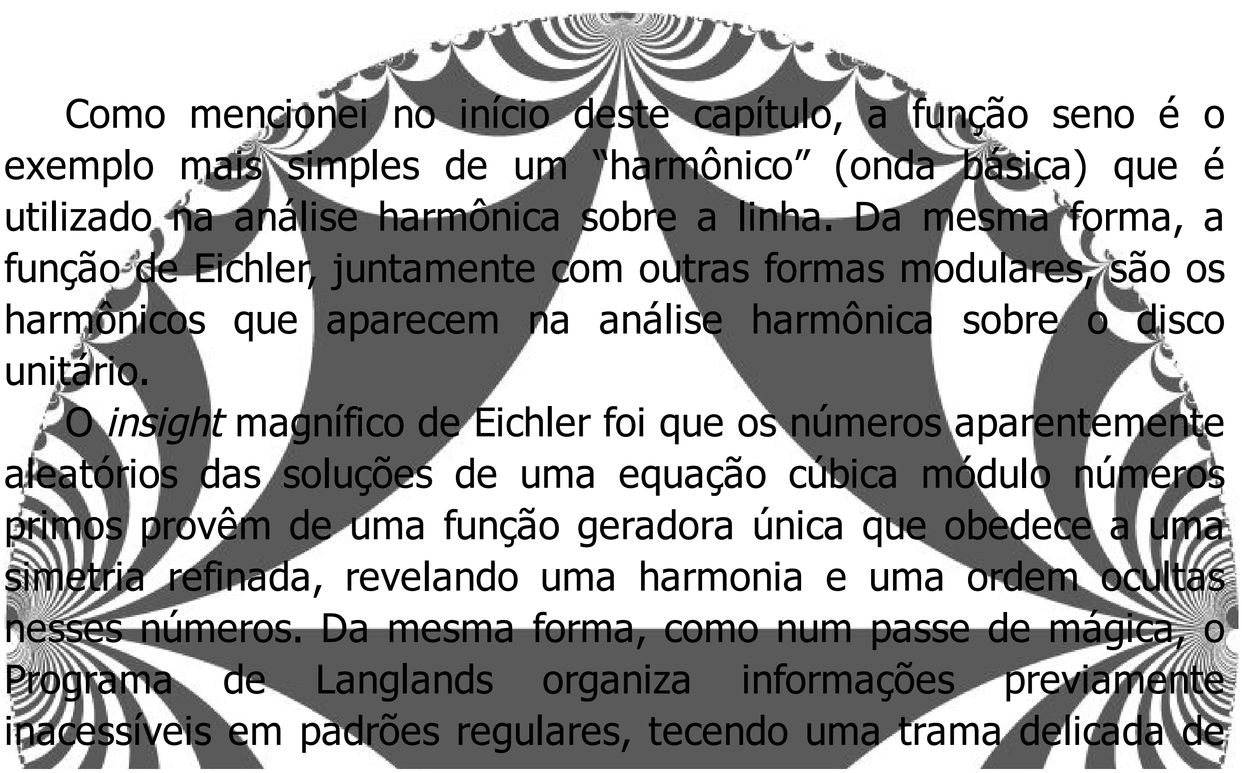
O que é ainda mais fascinante é que, se q for um número cujo valor absoluto é menor que 1, então a soma infinita acima converge para um número bem definido. Assim, obtemos uma função em q, e essa função tem uma propriedade muito especial, que é similar à periodicidade das funções trigonométricas seno e cosseno.

A função seno seno(x) é periódica com o período 2π, isto é, seno($x + 2\pi$) = seno(x). No entanto, também seno($x + 4\pi$) = seno(x), e, em um amplo sentido, seno($x + 2\pi n$) = seno(x), para qualquer número inteiro n. Pense a respeito disso desta maneira: cada número inteiro n origina uma simetria de linha, e cada ponto x sobre a linha é trocado por $x + 2\pi n$. Portanto, o grupo de todos os números inteiros é concebido como um grupo de simetrias da linha. A periodicidade da função seno significa que essa função é invariável nesse grupo.

Da mesma forma, a função geradora de Eichler da variável q apresentada acima acaba se revelando invariável sob um determinado grupo de simetria. Nesse caso, devemos adotar q para ser não um número real, mas sim complexo (discutiremos esse tópico no próximo capítulo). Então, podemos ver *q* não como um ponto sobre a linha, como no caso da função seno, mas como um ponto dentro de um disco unitário sobre o plano complexo. A propriedade simétrica é similar: sobre esse disco há um grupo de simetrias, e nossa função é invariável nesse grupo.[12] Uma função com esse tipo de propriedade de invariância é denominada *forma modular.*

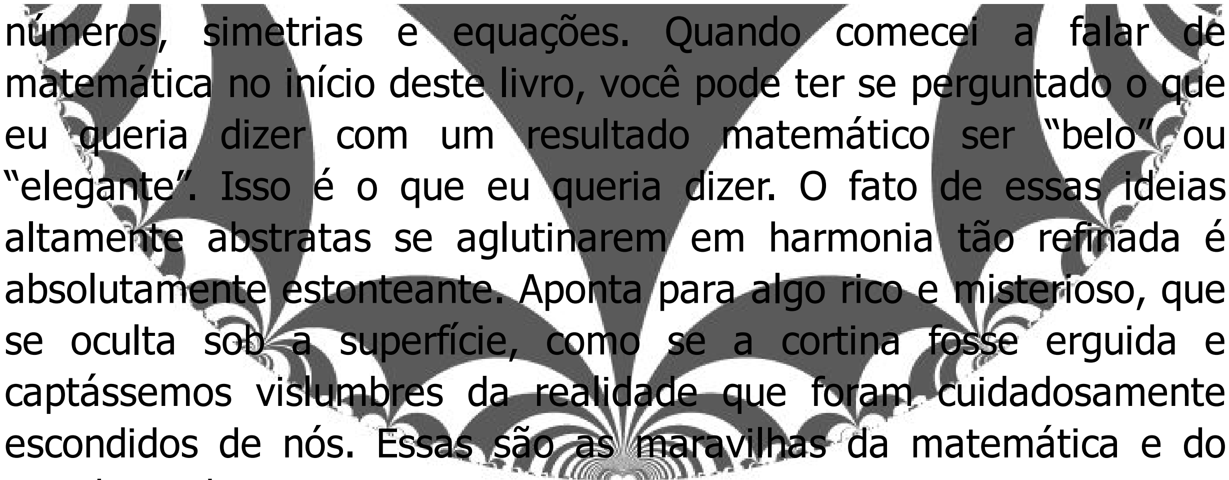
O grupo de simetria do disco é muito rico. Para ter uma ideia do que é, observe essa figura, na qual o disco é quebrado numa infinidade de triângulos.[13]

As simetrias atuam trocando esses triângulos. De fato, para dois triângulos quaisquer, há uma simetria os trocando. Ainda que essas simetrias sejam muito sofisticadas, são análogas a como, quando o grupo de números inteiros atua sobre a linha, suas simetrias se deslocam em torno dos intervalos [2πm, 2π(m + 1)]. A função seno é invariável nessas simetrias, enquanto a função geradora de Eichler é invariável sob as simetrias do disco.



Como mencionei no início deste capítulo, a função seno é o exemplo mais simples de um "harmônico" (onda básica) que é utilizado na análise harmônica sobre a linha. Da mesma forma, a função de Eichler, juntamente com outras formas modulares, são os harmônicos que aparecem na análise harmônica sobre o disco unitário.

O *insight* magnífico de Eichler foi que os números aparentemente aleatórios das soluções de uma equação cúbica módulo números primos provêm de uma função geradora única que obedece a uma simetria refinada, revelando uma harmonia e uma ordem ocultas nesses números. Da mesma forma, como num passe de mágica, o Programa de Langlands organiza informações previamente inacessíveis em padrões regulares, tecendo uma trama delicada de



números, simetrias e equações. Quando comecei a falar de matemática no início deste livro, você pode ter se perguntado o que eu queria dizer com um resultado matemático ser “belo” ou “elegante”. Isso é o que eu queria dizer. O fato de essas ideias altamente abstratas se aglutinarem em harmonia tão refinada é absolutamente estonteante. Aponta para algo rico e misterioso, que se oculta sob a superfície, como se a cortina fosse erguida e captássemos vislumbres da realidade que foram cuidadosamente escondidos de nós. Essas são as maravilhas da matemática e do mundo modernos.

Alguém também pode perguntar se, além de possuir beleza inata e estabelecer uma ligação surpreendente entre áreas da matemática que parecem estar muito distantes umas das outras, esse resultado possui aplicações práticas. Esta é uma questão justa. No momento, não tenho conhecimento de nenhuma. No entanto, as equações cúbicas nos corpos finitos de elementos *p* do tipo que consideramos anteriormente (que dão origem às assim chamadas curvas elípticas) são utilizadas amplamente em criptografia.[14] Assim, não me surpreenderei se os análogos do resultado de Eichler encontrarem, algum dia, aplicações tão eficientes e ubíquas como os algoritmos de criptografia.

A conjectura de Shimura–Taniyama–Weil é uma generalização do resultado de Eichler. Afirma que, para *qualquer* equação cúbica como a mencionada acima (sujeita a algumas condições moderadas), os números das soluções módulo números primos são os coeficientes de uma forma modular. Além disso, há uma correspondência um-a-um entre as equações cúbicas e as formas modulares de certo tipo.

O que eu quero dizer com correspondência um-a-um? Vamos supor que temos cinco canetas e cinco lápis. Podemos atribuir um lápis para cada caneta, de maneira que cada lápis seja atribuído a uma única caneta. Isso se denomina correspondência um-a-um.

Há diversas maneiras distintas de se fazer isso. No entanto, vamos supor que, em nossa correspondência um-a-um, cada caneta tenha exatamente o mesmo comprimento do lápis atribuído a ela. Então, designaremos o comprimento como “invariável” e diremos que nossa correspondência preserva esse invariável. Se todas as canetas tiverem comprimentos diferentes, a correspondência um-a-um será determinada unicamente por essa propriedade.

No caso da conjectura de Shimura–Taniyama–Weil, os objetos de um lado são as equações cúbicas, como as mencionadas anteriormente. Serão nossas canetas, e, para cada uma delas, os números a_p serão as invariáveis ligadas às mesmas (é como o comprimento da caneta, exceto que agora não há apenas uma invariável, mas toda uma coleção rotulada pelos números primos p).

No outro lado, os objetos de correspondência são formas modulares. Serão nossos lápis, e, para cada um deles, os coeficientes b_p serão as invariáveis ligadas aos mesmos (como o comprimento de um lápis).

A conjectura de Shimura–Taniyama–Weil enuncia que há uma correspondência um-a-um entre esses objetos que preserva essas invariáveis:

$$\boxed{\begin{matrix}\text{equações cúbicas}\\ \{\text{número de soluções } a_p\}\end{matrix}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{formas modulares}\\ \{\text{coeficientes } b_p\}\end{matrix}}$$

Ou seja, para qualquer equação cúbica, existe uma forma modular, de tal modo que $a_p = b_p$, para todos os números primos p, e vice-versa.[15]

Agora, posso explicar a ligação entre a conjectura de Shimura–Taniyama-Weil e o Último Teorema de Fermat: começando com uma solução da equação de Fermat, podemos construir uma determinada equação cúbica.[16] No entanto, Ken Ribet demonstrou que os números das soluções dessa equação cúbica módulo números primos não podem ser os coeficientes de uma forma modular cuja existência é estipulada pela conjectura de Shimura–Taniyama–Weil.

Uma vez que essa conjectura seja demonstrada, concluímos que a equação cúbica não pode existir. Portanto, não há soluções para a equação de Fermat.

A conjectura de Shimura–Taniyama–Weil é um resultado impressionante, pois os números a_p provêm do estudo de soluções de uma equação módulo números primos – são do mundo da teoria dos números – e os números b_p são os coeficientes de uma forma modular, do mundo da análise harmônica. Esses dois mundos parecem estar a anos-luz de distância e, no entanto, constata-se que descrevem a mesma coisa!

A conjectura de Shimura–Taniyama–Weil pode ser reformulada como um caso especial do Programa de Langlands. Para isso, substituímos cada uma das equações cúbicas que aparecem na conjectura de Shimura–Taniyama–Weil por certa representação bidimensional do grupo de Galois. Naturalmente, a representação se obtém da equação cúbica, e os números a_p podem ser ligados diretamente a essa representação (e não à equação cúbica). Portanto, a conjectura pode ser expressa como uma relação entre representações bidimensionais do grupo de Galois e formas modulares.

(Recordo do capítulo 2, quando dissemos que uma representação bidimensional de um grupo é uma regra que fixa uma simetria de um espaço bidimensional – isto é, um plano – para cada elemento desse grupo. Por exemplo, falamos sobre uma representação bidimensional do grupo circular.)

Em um sentido ainda mais ampio, as conjecturas do Programa de Langlands relacionam, de maneiras inesperadas e profundas, representações *n*-dimensionais do grupo de Galois (que generalizam as representações bidimensionais correspondentes às equações cúbicas da conjectura de Shimura–Taniyama–Weil) e as assim chamadas *funções auto-morfas* (que generalizam as formas modulares da conjectura de Shimura–Taniyama–Weil):

Embora não reste muita dúvida de que essas conjecturas são válidas, a maioria delas ainda não está demonstrada até hoje, apesar do enorme esforço de diversas gerações de matemáticos dos últimos 45 anos.

Você pode estar se perguntando: como alguém pode propor esses tipos de conjecturas?

Realmente, isso é uma questão da natureza do *insight* matemático. A capacidade de enxergar padrões e conexões que ninguém enxergara antes não vem facilmente. Em geral, é o resultado de meses, ou até mesmo de anos, de trabalho duro. Aos poucos, a indicação de um novo fenômeno ou teoria emerge, e, inicialmente, você não acredita. No entanto, diz: "E se for verdade?" Você tenta testar a ideia, fazendo cálculos com amostras. Às vezes, esses cálculos são árduos, e você precisa escalar montanhas de fórmulas pesadas. A probabilidade de cometer um erro é muito alta, e, se não funcionar inicialmente, você tentará refazer, repetidas vezes.

Frequentemente, no fim do dia (ou de um mês ou de um ano), você constata que sua ideia inicial estava errada e precisa tentar outra coisa. Esses são os momentos de frustração e desespero. Você acha que perdeu muito tempo, sem nada para demonstrar. Isso dói. Contudo, você jamais desiste. Volta à prancheta, analisa mais dados, aprende com os erros anteriores, procura propor uma ideia melhor. E, de vez em quando, derepente, sua ideia começa a funcionar. É como se você tivesse passado um dia inútil surfando e finalmente pegasse uma onda: tenta dar conta dela e surfá-la o maior tempo possível. Em momentos como estes, você tem de liberar sua imaginação e deixar a onda levá-lo o mais longe possível. Mesmo se, inicialmente, a ideia parece totalmente maluca.

O enunciado da conjectura de Shimura–Taniyama–Weil deve ter parecido maluco para seus criadores. Como poderia não parecer? Sim, a conjectura tinha suas raízes em resultados anteriores, como os de Eichler que discutimos anteriormente (que foram generalizados posteriormente por Shimura), que demonstraram que, para *algumas* equações cúbicas, os números de soluções módulo *p* foram registrados nos coeficientes de uma forma modular. No entanto, a ideia de que isso era válido para *qualquer* equação cúbica deve ter parecido totalmente absurda na ocasião. Era um salto de fé, dado inicialmente por Yukata Taniyama, matemático japonês, na forma de uma questão que ele propôs no Simpósio Internacional de Teoria dos Números Algébricos, realizado em Tóquio, em setembro de 1955.

Sempre me perguntei: o que levou Taniyama a *acreditar* que isso não era uma maluquice, mas algo real? A ter coragem de dizer isso publicamente?

Nunca saberemos. Infelizmente, não muito tempo depois de sua grande descoberta, em novembro de 1958, Taniyama suicidou-se. Ele tinha só 31 anos. Para aumentar ainda mais a tragédia, pouco depois, a mulher com quem estava planejando se casar também se matou, deixando o seguinte bilhete:[17]

> Prometemos um ao outro que, independentemente de onde fôssemos, jamais nos separaríamos. Agora que ele se foi, também devo ir, a fim de me juntar a ele.

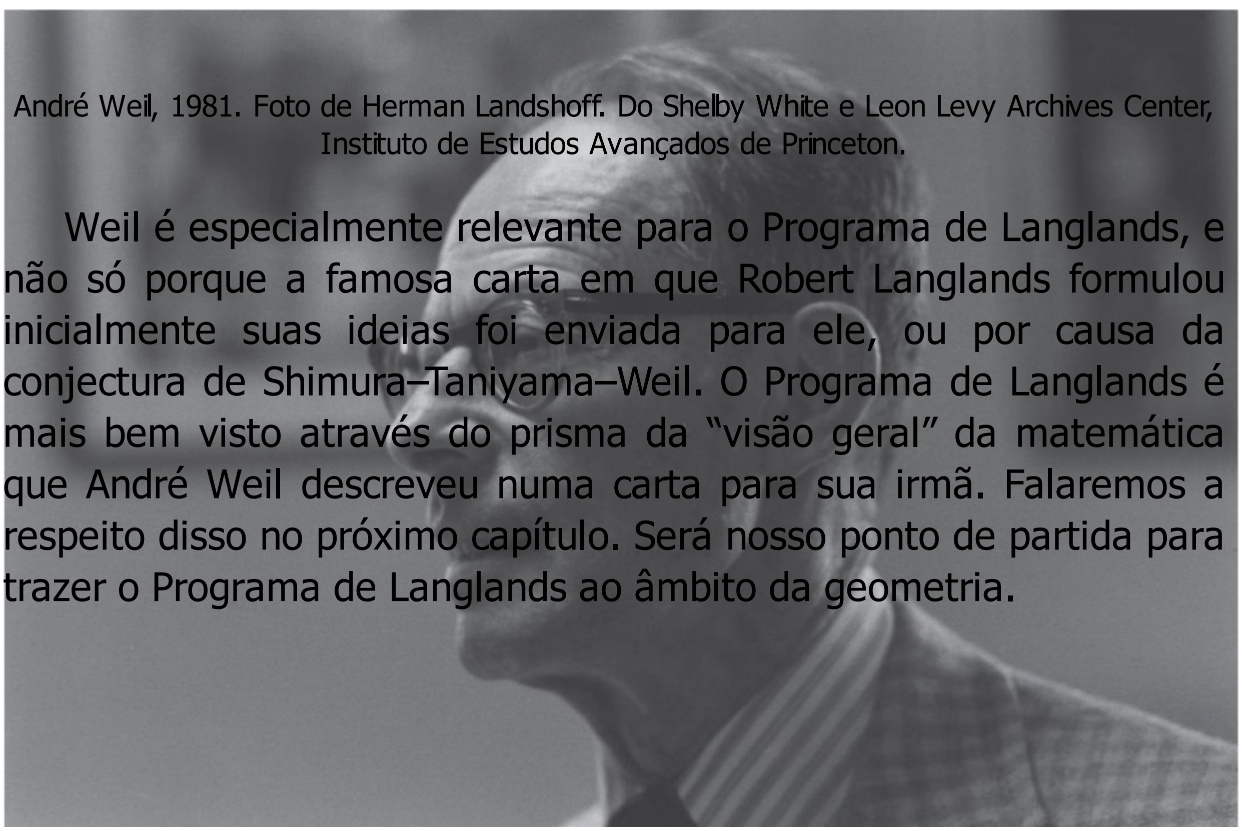
Posteriormente, a conjectura foi elaborada de modo mais preciso por Goro Shimura, outro matemático japonês, amigo e colega de Taniyama. Na maior parte de sua vida, Shimura trabalhou na Universidade de Princeton, sendo atualmente seu professor emérito. Ele fez contribuições importantes para a matemática, muitas pertinentes ao Programa de Langlands, e diversos conceitos fundamentais dessa área possuem seu nome (como as “relações de congruência de Eichler–Shimura” e as “variedades de Shimura”).

Num ensaio ponderado a respeito de Taniyama, Shimura fez este comentário impressionante:[18]

> Embora não fosse um tipo relaxado, ele foi dotado da capacidade especial de cometer muitos erros, a maioria na direção correta. Eu o invejava por isso, e tentei em vão imitá-lo, mas achava muito difícil cometer bons erros.

Nas palavras de Shimura, Taniyama "não foi muito cuidadoso quando enunciou seu problema" no simpósio de Tóquio, em setembro de 1955.[19] Algumas correções tiveram de ser realizadas. No entanto, foi um *insight* revolucionário, que levou a um dos feitos mais significativos da matemática do século XX.

A terceira pessoa cujo nome está ligado à conjectura é André Weil, a quem mencionei antes. Ele é um dos gigantes da matemática do século XX. Conhecido tanto por sua genialidade, como por seu mau humor, ele nasceu na França e foi para os Estados Unidos na Segunda Guerra Mundial. Depois de manter cargos acadêmicos em diversas universidades norte-americanas, fixou-se no Instituto de Estudos Avançados de Princeton, em 1958, e ficou ali até sua morte, em 1998, com 92 anos.



André Weil, 1981. Foto de Herman Landshoff. Do Shelby White e Leon Levy Archives Center, Instituto de Estudos Avançados de Princeton.

Weil é especialmente relevante para o Programa de Langlands, e não só porque a famosa carta em que Robert Langlands formulou inicialmente suas ideias foi enviada para ele, ou por causa da conjectura de Shimura–Taniyama–Weil. O Programa de Langlands é mais bem visto através do prisma da "visão geral" da matemática que André Weil descreveu numa carta para sua irmã. Falaremos a respeito disso no próximo capítulo. Será nosso ponto de partida para trazer o Programa de Langlands ao âmbito da geometria.

Capítulo 9

Pedra de Roseta

Em 1940, na França, durante a guerra, André Weil foi preso por se recusar a servir nas forças armadas. Como o obituário na revista *The Economist* disse:[1]

> [Weil] ficara profundamente chocado… com o estrago causado à matemática na França pela Primeira Guerra Mundial, quando "uma ideia equivocada de igualdade diante do sacrifício" resultou na matança da jovem elite científica do país. À luz disso, ele acreditou que tinha o dever, não só para si, mas também para a civilização, de dedicar sua vida à matemática. De fato, ele sustentou, deixá-lo se desviar da matéria seria um pecado. Quando certas pessoas levantaram a objeção "mas se todos fossem se comportar como você…", ele respondeu que essa possibilidade parecia-lhe tão implausível que não se sentia obrigado a levá-la em consideração.

Na prisão, Weil escreveu uma carta para sua irmã, Simone Weil, famosa filósofa e humanista. Essa carta é um documento notável; nela, ele tenta explicar, em termos bastante elementares (acessíveis até a uma filósofa – estou brincando!) a "visão geral" da matemática, como ele a enxergava. Ao fazer isso, ele dá um grande exemplo, a ser seguido por todos os matemáticos. Às vezes brinco que talvez devêssemos prender alguns dos principais matemáticos, para forçá-los a expressar suas ideias em termos acessíveis, como Weil fez.

Na carta, Weil escreve a respeito do papel da analogia na matemática, e ilustra isso por meio da analogia que mais o interessava: entre a teoria dos números e a geometria.

Essa analogia provou ser muito importante para o desenvolvimento do Programa de Langlands. Como discutimos anteriormente, as raízes do Programa de Langlands estão na teoria dos números. Langlands conjecturou que questões difíceis da teoria dos números, como o cálculo das soluções das equações módulo números primos, podem ser resolvidas com métodos da análise harmônica; de modo mais específico, o estudo das funções automorfas. Isso é estimulante: em primeiro lugar, oferece uma nova maneira de resolver problemas que pareciam insolúveis anteriormente. E, em segundo, aponta para ligações profundas e fundamentais entre áreas distintas da matemática. Assim, naturalmente, queremos saber o que realmente está acontecendo: por que essas ligações ocultas existem? E nós ainda não entendemos isso completamente. Mesmo a conjectura de Shimura–Taniyama–Weil levou muito tempo para ser resolvida. E é apenas um caso especial das conjecturas gerais de Langlands. Há milhares de enunciados similares que ainda não foram demonstrados.

Então, como devemos abordar essas conjecturas difíceis? Uma maneira é simplesmente continuar trabalhando duro e tentar propor novas ideias e *insights.* Isso aconteceu, e progressos significativos foram feitos. Outra possibilidade é tentar expandir o escopo do Programa de Langlands. Como ele aponta para algumas estruturas essenciais da teoria dos números e da análise harmônica, e das ligações entre ambas, há chances de que estruturas e ligações semelhantes também possam ser descobertas entre outros campos da matemática.

De fato, isso acabou se revelando verdade. Gradualmente, constatou-se que os mesmos padrões misteriosos podem ser observados em outras áreas da matemática, como na geometria e até mesmo na física quântica. Depois que aprendemos algo sobre esses padrões em uma área, obtemos alusões a respeito de seus significados em outras áreas. Afirmei anteriormente que o Programa de Langlands é a Teoria da Grande Unificação da matemática. O que quero dizer com isso é que ele aponta para alguns fenômenos e ligações universais entre esses fenômenos através dos distintos campos da matemática. E acredito que detém a chave para o entendimento do que realmente envolve a matemática, muito além das conjecturas originais de Langlands.

Atualmente, o Programa de Langlands é um assunto muito vasto. Há uma grande comunidade de pessoas trabalhando nele em distintos ramos: teoria dos números, análise harmônica, geometria, teoria da representação, física matemática. Embora trabalhem com objetos muito distintos, todos estão observando fenômenos parecidos. E esses fenômenos dão indícios para o entendimento de como esses diversos domínios estão interligados, como peças de um gigantesco quebra-cabeça.

Meu ponto de partida para o Programa de Langlands foi meu trabalho a respeito da álgebra de Kac–Moody, que descreverei em detalhes nos próximos capítulos. No entanto, quanto mais aprendia sobre o Programa de Langlands, mais ficava entusiasmado com a maneira pela qual ele é ubíquo em matemática.

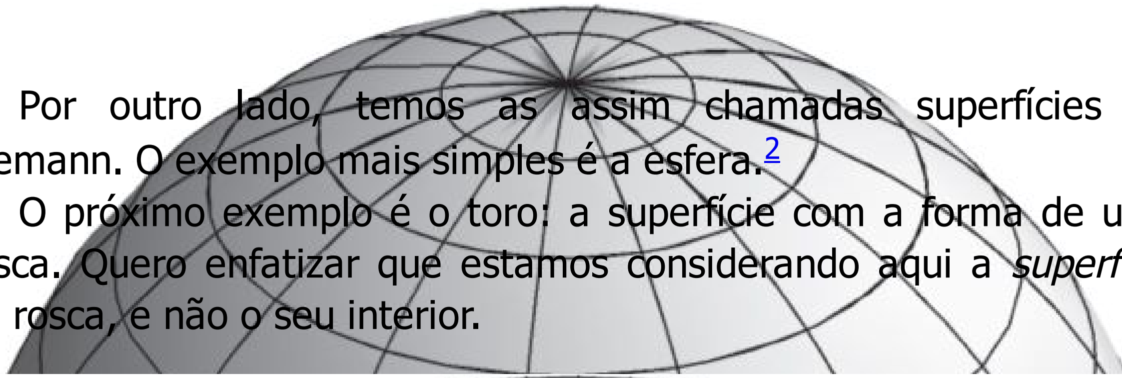
Pense nas distintas áreas da matemática moderna como idiomas. Temos sentenças desses idiomas que achamos que significam a mesma coisa. Nós as colocamos perto umas das outras, e, aos poucos, começamos a desenvolver um dicionário que nos permite a tradução entre distintas áreas da matemática. André Weil nos oferece um arcabouço adequado para o entendimento das ligações entre a teoria dos números e a geometria; uma espécie de “pedra de Roseta” da matemática moderna.

Por um lado, temos objetos da teoria dos números: números racionais e outros corpos numéricos que discutimos no capítulo anterior, como aqueles que obtivemos juntando

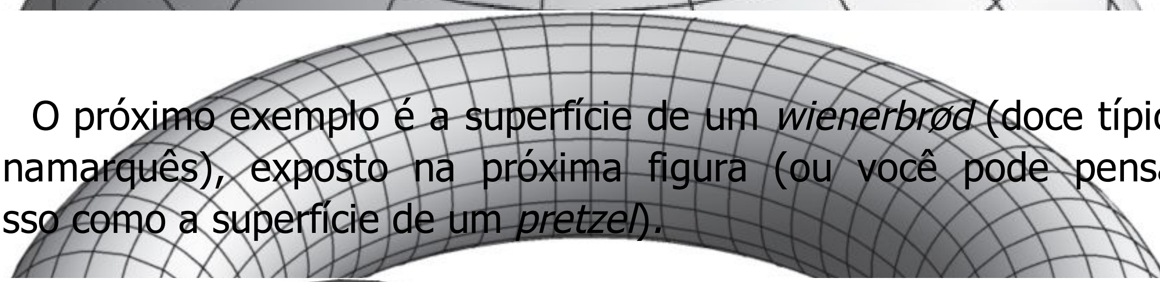
$$\sqrt{2}$$

e seus grupos de Galois.

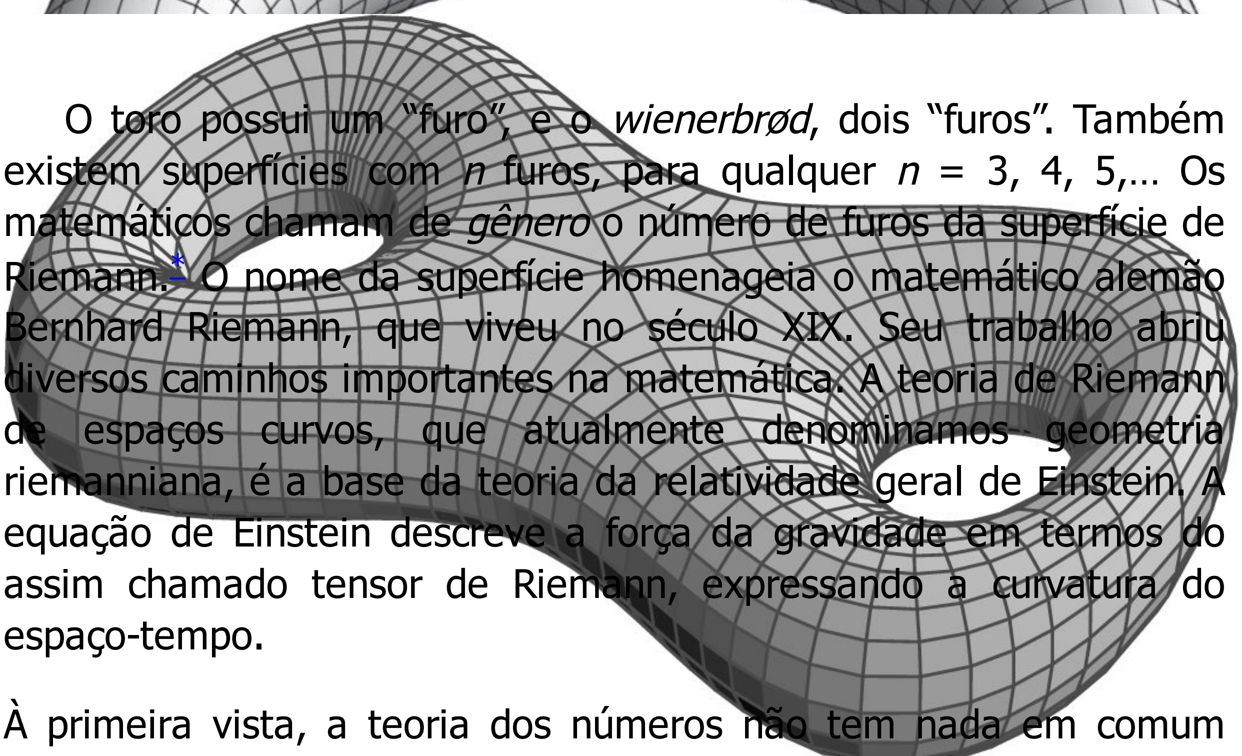
Por outro lado, temos as assim chamadas superfícies de Riemann. O exemplo mais simples é a esfera.[2]



O próximo exemplo é o toro: a superfície com a forma de uma rosca. Quero enfatizar que estamos considerando aqui a *superfície* da rosca, e não o seu interior.



O próximo exemplo é a superfície de um *wienerbrød* (doce típico dinamarquês), exposto na próxima figura (ou você pode pensar nisso como a superfície de um *pretzel*).



O toro possui um "furo", e o *wienerbrød*, dois "furos". Também existem superfícies com *n* furos, para qualquer *n* = 3, 4, 5,… Os matemáticos chamam de *gênero* o número de furos da superfície de Riemann.[*] O nome da superfície homenageia o matemático alemão Bernhard Riemann, que viveu no século XIX. Seu trabalho abriu diversos caminhos importantes na matemática. A teoria de Riemann de espaços curvos, que atualmente denominamos geometria riemanniana, é a base da teoria da relatividade geral de Einstein. A equação de Einstein descreve a força da gravidade em termos do assim chamado tensor de Riemann, expressando a curvatura do espaço-tempo.

À primeira vista, a teoria dos números não tem nada em comum com as superfícies de Riemann. No entanto, constata-se que há diversas analogias entre ambas. O ponto-chave é que há outra classe de objetos entre as duas.

Para perceber isso, temos de entender que a superfície de Riemann pode ser descrita por meio de uma equação algébrica. Por exemplo, consideremos novamente uma equação cúbica, como

$$y^2 + y = x^3 - x^2.$$

Como observamos anteriormente, quando falamos de soluções para essa equação, é importante especificar a que sistema numérico elas pertencem. Há muitas alternativas, e distintas alternativas originam diferentes teorias matemáticas.

No capítulo anterior, discutimos soluções módulo números primos, e essa é uma teoria. No entanto, também podemos procurar soluções em *números complexos.* Essa é outra teoria, que produz as superfícies de Riemann.

Frequentemente, as pessoas atribuem qualidades quase místicas aos números complexos, como se fossem objetos incrivelmente complicados. A verdade é que eles não são mais complicados que os números que discutimos no capítulo anterior, quando procuramos compreender a raiz quadrada de 2.

Deixe-me explicar. No capítulo anterior, juntamos aos números racionais duas soluções da equação $x^2 = 2$, que denotamos por

$\sqrt{2}$

e –

$\sqrt{2}$

. Agora, em vez de considerar a equação $x^2 = 2$, consideramos a equação $x^2 = -1$. Parece muito mais complicado do que a equação anterior? Não. Não tem soluções entre os números racionais, mas não temos receio disso. Juntemos as duas soluções dessa equação aos números racionais. Vamos denotá-las por

$\sqrt{-1}$

e −

$\sqrt{-1}$

. Elas resolvem a equação $x^2 = -1$, isto é,

$\sqrt{-1}$

$$^2 = -1, \quad (-$$

$\sqrt{-1}$

$$)^2 = -1.$$

Há somente uma diferença marginal com o caso anterior. O número

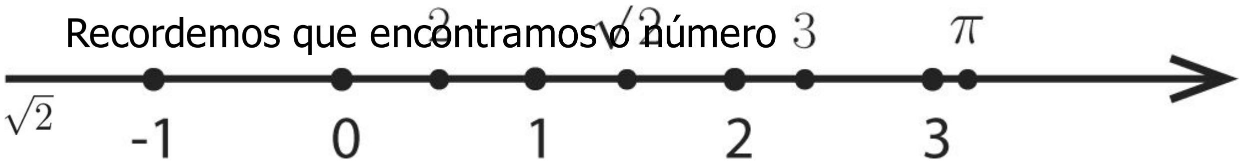
$\sqrt{2}$

não é racional, mas é um número *real*; assim, juntando-o a números racionais, não deixamos o âmbito dos números reais.

Podemos pensar nos números reais de maneira geométrica na forma seguinte. Desenhe uma linha e marque dois pontos nela, que representarão os números 0 e 1. Em seguida, marque um ponto à direita de 1, cuja distância para 1 é igual à distância entre 0 e l. Esse ponto representará o número 2. Representaremos todos os outros números inteiros de forma similar. Então, marque os números racionais, subdividindo os intervalos entre os pontos que representam os números inteiros. Por exemplo, o número $\frac{1}{2}$ é exatamente a metade da distância entre 0 e 1; o número $\frac{7}{3}$ é um terço da distância de 2 a 3, e assim por diante. Agora, os números reais estão, intuitivamente, numa correspondência um-a-um com todos os pontos dessa linha.[3]

$\frac{1}{\;}$ $\sqrt{\;}$ $\frac{7}{\;}$

Recordemos que encontramos o número



$\sqrt{2}$

como o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo com catetos de comprimento igual a 1. Assim, marcamos

$\sqrt{2}$

na linha dos números reais, encontrando o ponto à direita de o cuja distância a 0 é igual ao comprimento da hipotenusa. Da mesma forma, podemos marcar[4] nessa linha o número π, que é a circunferência de um círculo de diâmetro 1.

Por outro lado, a equação $x^2 = -1$ não possui soluções entre os números racionais, e também não possui soluções entre os números reais. De fato, o quadrado de qualquer número real deve ser positivo ou 0; logo, não pode ser igual a –1. Assim, ao contrário de

$\sqrt{2}$

e –

$\sqrt{2}$

, os números

$\sqrt{-1}$

e –

$\sqrt{-1}$

não são números reais. E então? Seguimos o mesmo procedimento e os introduzimos exatamente da mesma maneira que introduzimos os números

$\sqrt{2}$

e –

$\sqrt{2}$

. Utilizamos as mesmas regras para fazer contas com esses novos números.

Recordemos como argumentamos antes: constatamos que a equação $x^2 = 2$ 2 não tinha soluções entre os números racionais. Assim, criamos duas soluções dessa equação, denominadas

$\sqrt{2}$

e –

$\sqrt{2}$

, e as juntamos aos números racionais, criando um novo sistema numérico (que chamamos de corpo numérico). Da mesma forma, agora consideramos a equação $x^2 = -1$ e constatamos que ela também não possui soluções entre os números racionais. Assim, *criamos* duas soluções dessa equação, chamamos de

$\sqrt{-1}$

e –

$\sqrt{-1}$

, e as juntamos aos números racionais. É exatamente o mesmo procedimento! Por que devemos considerar esse novo sistema numérico como mais complicado do que nosso antigo sistema numérico, aquele com

$\sqrt{2}$

?

A razão é puramente psicológica: enquanto podemos representar

$\sqrt{2}$

como o comprimento de um lado de um triângulo retângulo, não temos uma representação geométrica tão óbvia de

$\sqrt{-1}$

. No entanto, podemos manipular

$\sqrt{-1}$

algebricamente tão efetivamente como

$\sqrt{2}$

.

Os elementos do novo sistema numérico que obtemos juntando

$\sqrt{-1}$

aos números racionais são denominados números complexos. Cada um deles pode ser escrito da seguinte maneira:

$$r + s$$

$\sqrt{-1}$

,

onde r e s são números racionais. Compare essa fórmula com a da página 93, que expressa elementos gerais do sistema numérico obtido juntando

$\sqrt{2}$

. Podemos adicionar dois números quaisquer dessa forma, adicionando separadamente suas r-partes e s-partes. Também podemos multiplicar esses dois números quaisquer abrindo os parênteses e usando o fato de que

$\sqrt{-1}$

.

$$\sqrt{-1}$$

= –1. De forma similar, também podemos subtrair e dividir esses números.

Finalmente, ampliamos a definição de números complexos permitindo que *r* e *s* na fórmula acima sejam números reais arbitrários (não apenas números racionais). Então, obtemos os números complexos mais gerais. Note que é costume denotar

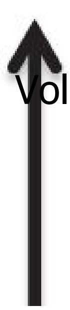
$$\sqrt{-1}$$

por *i* (de “imaginário”), mas achei melhor não fazer isso, para enfatizar o significado algébrico desse número: realmente, é apenas uma raiz quadrada de –1, nem mais nem menos. É simplesmente tão concreto quanto a raiz quadrada de 2. Não há nada de misterioso a respeito disso.

Podemos ter uma sensação de como esses números são concretos representando-os geometricamente. Da mesma forma que os números reais podem ser representados geometricamente como pontos de uma linha, os números complexos podem ser representados como pontos de um plano. Ou seja, representamos o número complexo $r + s$

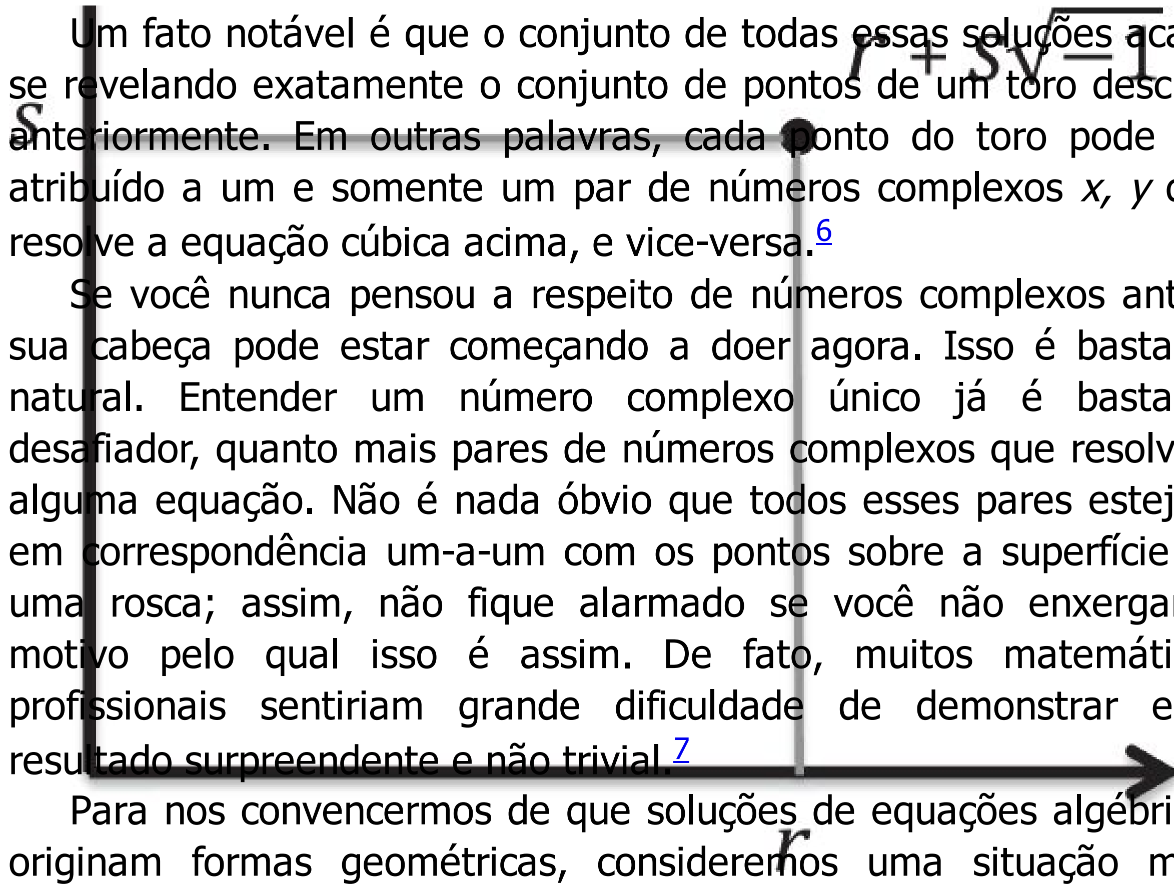
$$\sqrt{-1}$$

como um ponto sobre o plano com coordenadas *r* e *s*:[5] e procuremos por soluções *x* e *y*, que são números complexos.



Voltemos à nossa equação cúbica

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$



Um fato notável é que o conjunto de todas essas soluções acaba se revelando exatamente o conjunto de pontos de um toro descrito anteriormente. Em outras palavras, cada ponto do toro pode ser atribuído a um e somente um par de números complexos *x, y* que resolve a equação cúbica acima, e vice-versa.[6]

Se você nunca pensou a respeito de números complexos antes, sua cabeça pode estar começando a doer agora. Isso é bastante natural. Entender um número complexo único já é bastante desafiador, quanto mais pares de números complexos que resolvem alguma equação. Não é nada óbvio que todos esses pares estejam em correspondência um-a-um com os pontos sobre a superfície de uma rosca; assim, não fique alarmado se você não enxergar o motivo pelo qual isso é assim. De fato, muitos matemáticos profissionais sentiriam grande dificuldade de demonstrar esse resultado surpreendente e não trivial.[7]

Para nos convencermos de que soluções de equações algébricas originam formas geométricas, consideremos uma situação mais simples: soluções com números reais, em vez de números complexos. Por exemplo, a equação

$$x^2 + y^2 = 1$$

e marquemos suas soluções como pontos sobre o plano com coordenadas x e y. O conjunto de todas essas soluções é um círculo de raio igual a 1, centralizado na origem. Da mesma forma, as soluções de qualquer outra equação algébrica em duas variáveis com valores reais x e y formam uma curva nesse plano.[8]

Agora, números complexos são, em certo sentido, duplos de números reais (de fato, cada número complexo é determinado por um par de números reais); assim, previsivelmente, as soluções dessas equações algébricas em variáveis complexas x e y formam uma superfície de Riemann (uma curva é unidimensional, e uma superfície de Riemann é bidimensional, assim como foi explicado no capítulo 10).

Além de soluções reais e complexas, também podemos buscar soluções *x*, *y* dessas equações, que consideram valores num corpo finito {0, 1, 2, …, p-2, p-l}, onde *p* é um número primo. Isso significa que, quando substituímos *x*, *y* na equação cúbica acima, por exemplo, os lados esquerdo e direito se tornam números inteiros, que são iguais entre si até um múltiplo número inteiro de *p*. Isso nos dá um objeto que os matemáticos denominam "curva sobre corpo finito". Claro que não são curvas de verdade. A terminologia se deve ao fato de que, quando buscamos soluções em números reais, obtemos curvas sobre o plano.[9]

O *insight* profundo de Weil foi que o objeto mais fundamental aqui é uma equação algébrica, como a equação cúbica acima. Dependendo da escolha do domínio em que buscamos soluções, a mesma equação origina uma superfície, uma curva ou um grupo de pontos. Mas estes não são nada além de avatares de um ser inefável, que é a própria equação, da mesma forma que Vishnu possui dez avatares, ou encarnações, no hinduísmo. Um tanto por acaso, na carta para sua irmã, André Weil invocou o Bhagavad-Gita,[10] texto sagrado do hinduísmo, em que a doutrina dos avatares de Vishnu, acredita-se, apareceu pela primeira vez.[11] Weil escreveu poeticamente a respeito do que acontece quando a suspeita de uma analogia entre duas teorias se converte num conhecimento concreto:[12]

> As duas teorias foram embora; seus problemas e seus deliciosos reflexos mútuos foram embora; suas carícias furtivas; suas brigas inexplicáveis; infelizmente, temos quase uma teoria, cuja beleza majestosa não consegue mais nos excitar. Nada é mais fértil do que essas ligações ilícitas; nada dá mais prazer ao conhecedor… O prazer vem da ilusão e do despertar dos sentidos; depois que a ilusão desaparece e o conhecimento é adquirido, alcançamos a indiferença; no *Gita*, há alguns versos bastante lúcidos a respeito desse efeito. Mas voltemos às funções algébricas.

A ligação entre as superfícies de Riemann e as curvas sobre corpos finitos deve ficar clara. As duas provêm do mesmo tipo de equação, mas buscamos soluções em domínios distintos: corpos finitos ou números complexos. Por outro lado, "qualquer argumento ou resultado da teoria dos números pode ser traduzido, palavra por palavra" em curvas sobre corpos finitos, como Weil escreveu em sua carta.[13] Portanto, a ideia de Weil foi que as curvas sobre corpos finitos são os objetos que fazem a intermediação entre a teoria dos números e as superfícies de Riemann.

Dessa maneira, encontramos uma ponte, ou uma "plataforma giratória" – como Weil a denominou – entre a teoria dos números e as superfícies de Riemann. Esta é a teoria das curvas algébricas sobre corpos finitos. Em outras palavras, temos três trilhas paralelas, ou colunas:

Teoria dos Números *Curvas sobre corpos finitos* *Superfícies de Riemann*

Weil queria utilizar isso da seguinte maneira: pegar um enunciado em uma das três colunas e traduzi-lo em enunciados nas outras colunas. Ele escreveu para sua irmã:[14]

> Meu trabalho consiste em decifrar um texto trilíngue; de cada uma das três colunas, tenho apenas fragmentos díspares; tenho algumas ideias a respeito de cada uma das três línguas: mas também sei que há grandes diferenças de significado de uma coluna a outra, para as quais nada me preparou com antecedência. Nos muitos anos que trabalhei nisso, encontrei pequenos fragmentos do dicionário.

Weil seguiu adiante e descobriu uma das aplicações mais espetaculares de sua pedra de Roseta: o que denominamos agora as conjecturas Weil. A demonstração dessas conjecturas[15] estimulou muito o desenvolvimento da matemática na segunda metade do século XX.

Voltemos ao Programa de Langlands. As ideias originais de Langlands se relacionavam com a coluna esquerda da pedra de Roseta de Weil; isto é, a teoria dos números. Langlands relacionou as representações dos grupos de Galois dos corpos numéricos, que são objetos estudados na teoria dos números, com as funções automorfas, que são objetos da análise harmônica – uma área da matemática que está bem distante da teoria dos números (e também bem longe das outras colunas da pedra de Roseta). Nesse momento, podemos perguntar se esse tipo de relação também pode ser encontrado se substituirmos os grupos de Galois por alguns objetos nas colunas do centro e da direita da pedra de Roseta de Weil.

É bastante direto converter a relação de Langlands para a coluna central, pois todos os ingredientes necessários estão prontamente disponíveis. Os grupos de Galois dos corpos numéricos devem ser substituídos aqui pelos grupos de Galois pertinentes às curvas sobre corpos finitos. Também existe um ramo da análise harmônica que estuda funções automorfas adequadas. Já em seu trabalho original, Langlands relacionou representações de grupos de Galois e funções automorfas pertinentes à coluna central.

No entanto, não é tão clara a maneira de traduzir essa relação para a coluna direita da pedra de Roseta. Para isso, temos de encontrar os análogos geométricos dos grupos de Galois e das funções automorfas na teoria das superfícies de Riemann. Quando Langlands formulou suas ideias, os primeiros eram conhecidos, mas os segundos eram um grande mistério. Só na década de 1980 uma ideia apropriada foi encontrada, começando pelo trabalho pioneiro de Vladimir Drinfeld, brilhante matemático russo. Isso permitiu a tradução da relação de Langlands para a terceira coluna da pedra de Roseta.

Vamos discutir primeiro o análogo geométrico do grupo de Galois. É o assim chamado *grupo fundamental* de uma superfície de Riemann.

O grupo fundamental é um dos conceitos mais importantes do ramo matemático da topologia, que se concentra nas características mais proeminentes das formas geométricas (como o número de "furos" numa superfície de Riemann).

Consideremos, por exemplo, um toro. Pegamos um ponto nele – chamamos o mesmo de *P* –, e observamos as trajetórias fechadas que começam e terminam nesse ponto. Duas delas estão expostas na figura.

Da mesma forma, o grupo fundamental de qualquer superfície de Riemann consiste nessas trajetórias fechadas sobre a superfície de Riemann, começando e terminando no mesmo ponto definido *P*. [16]

Dadas duas trajetórias começando e terminando no ponto *P*, construímos outra da seguinte maneira: percorremos a primeira trajetória e, em seguida, nos movemos ao longo da segunda. Dessa maneira, obtemos uma nova trajetória, que também começará e terminará no ponto *P*. Acontece que essa "adição" de trajetórias fechadas satisfaz todas as propriedades de um grupo listadas no capítulo 2. Portanto, constatamos que elas formam, de fato, um grupo.[17]

Você pode ter reparado que a regra de adição de trajetórias no grupo fundamental é similar à regra de adição de tranças nos grupos de tranças, como definido no capítulo 5. Isso não é acidental. Como explicado, as tranças com *n* fios podem ser vistas como trajetórias no espaço das coleções de *n* pontos distintos no plano. Realmente, o grupo de tranças B_n é exatamente o grupo fundamental desse espaço.[18]

Acontece que as duas trajetórias no toro exibidas na figura anterior comutam mutuamente; isto é, adicioná-las em duas ordens possíveis nos dá o mesmo elemento do grupo fundamental.[19] O elemento mais geral do grupo fundamental do toro é, portanto, obtido ao seguirmos a primeira trajetória *M* vezes e, em seguida, a segunda trajetória *N* vezes, onde *M* e *N* são dois números inteiros (se *M* for negativo, então seguiremos a primeira trajetória – *M* vezes, no sentido oposto, e da mesma forma para *N* negativo). Como as duas trajetórias básicas comutam uma com a outra, a ordem em que as seguimos não importa; o resultado será o mesmo.

Para outras superfícies de Riemann, a estrutura do grupo fundamental é mais complicada.[20] Trajetórias distintas não necessariamente comutam uma com a outra. Isso é parecido para tranças com mais de dois fios que não se comutam, como discutimos no capítulo 5.

Há algum tempo se sabe que há uma profunda analogia entre os grupos de Galois e os grupos fundamentais.[21] Isso dá uma resposta à nossa primeira pergunta: qual é o análogo do grupo de Galois na coluna direita da pedra de Roseta de Weil? É o grupo fundamental da superfície de Riemann.

Nossa próxima questão é encontrar análogos apropriados das funções automorfas; isto é, os objetos que aparecem no outro lado da relação de Langlands. E aqui temos de dar um salto espetacular. As boas e velhas funções acabam se revelando inadequadas. Precisam ser substituídas por objetos mais sofisticados da matemática moderna, denominados *feixes*, que serão descritos no capítulo 14.

Isso foi proposto por Vladimir Drinfeld na década de 1980. Ele apresentou uma nova formulação do Programa de Langlands que se aplica às colunas central e direita, que envolvem curvas sobre corpos finitos e superfícies de Riemann, respectivamente. Essa formulação ficou conhecida como o Programa de Langlands geométrico. Em particular, Drinfeld descobriu os análogos das funções automorfas adequados para a coluna direita da pedra de Roseta de Weil.

Na primavera de 1990, conheci Drinfeld na Universidade de Harvard. Ele não só me deixou animado a respeito do Programa de Langlands, como também me disse que eu tinha um papel a desempenhar em seu desenvolvimento. Isso porque Drinfeld percebeu uma ligação entre o Programa de Langlands geométrico e o trabalho que eu realizara como estudante em Moscou. Os resultados desse trabalho eram essenciais na nova abordagem de Drinfeld, e isso, por sua vez, moldou minha vida matemática: o Programa de Langlands desempenhou um papel dominante em minha pesquisa desde então.

Voltemos, portanto, a Moscou, e vejamos aonde fui depois de concluir meu primeiro artigo, sobre grupos de tranças.

[*]Meu editor me disse que os pretzels do bar alemão perto da casa dele pertencem ao gênero 3 (e são deliciosos).

Capítulo 10

No loop

Em Moscou, no outono de 1986, eu estava no terceiro ano dos meus estudos em Kerosinka. Com o artigo sobre o grupo de tranças concluído e apresentado, Fuchs me fez uma pergunta: "O que você quer fazer agora?"

Eu queria outro problema para resolver. Durante anos, Fuchs trabalhara com Boris Feigin, seu ex-aluno, a respeito de representações da "álgebra de Lie". Segundo Fuchs, era uma área ativa, com diversos problemas não resolvidos e vínculos estreitos com a física quântica.

Sem dúvida, isso chamou minha atenção. Ainda que Evgeny Evgenievich tivesse me "convertido" para a matemática, e ainda que eu estivesse encantado com ela, jamais perdera meu fascínio de infância pela física. Era muito estimulante que os mundos da matemática e da física quântica pudessem se reunir.

Fuchs me entregou um artigo de oitenta páginas que ele e Feigin tinham escrito.

– Primeiro pensei em lhe dar um livro-texto sobre álgebra de Lie - Fuchs revelou. - Mas depois pensei: por que não lhe dar direto esse artigo?

Guardei-o com muito cuidado em minha mochila. Na época, ainda era inédito, e, graças ao rígido controle das autoridades soviéticas em relação às fotocopiadoras (receosas de que as pessoas fizessem cópias de literatura proibida, como os livros de Soljenítsin ou *Doutor Jivago*), existiam apenas algumas cópias disponíveis no mundo inteiro. Pouquíssimas pessoas tinham conseguido ver o artigo – posteriormente, Feigin brincou que eu talvez tenha sido o único que o leu do começo ao fim.

Estava escrito em inglês e deveria integrar uma coletânea de artigos publicados nos Estados Unidos. No entanto, o editor administrou de forma incompetente a publicação do livro, que demorou cerca de quinze anos para vir à luz. Nessa altura, a maioria dos resultados foi reproduzida em outros lugares; assim, também não foi muito lido depois de publicado. Não obstante, o artigo ficou famoso, e Feigin e Fuchs acabaram alcançando o devido crédito. O artigo deles foi citado amplamente na literatura (como o "Preprint de Moscou"), e até um novo termo foi cunhado, "Representações de Feigin-Fuchs", referindo-se às novas representações da álgebra de Lie que eles estudaram.

Quando comecei a ler o artigo, minha primeira pergunta foi: o que são esses objetos que têm um nome tão estranho, "álgebra de Lie"? O artigo que Fuchs me deu trazia tópicos que eu jamais estudara; assim, fui a uma livraria e comprei todos os livros sobre álgebra de Lie que consegui encontrar. O que não consegui achar peguei emprestado na biblioteca de Kerosinka. Fiquei lendo os livros junto com o artigo de Feigin–Fuchs. Essa experiência moldou meu estilo de aprendizagem. Desde então, jamais me satisfiz com uma única fonte; procuro encontrar todas as fontes disponíveis e devorá-las.

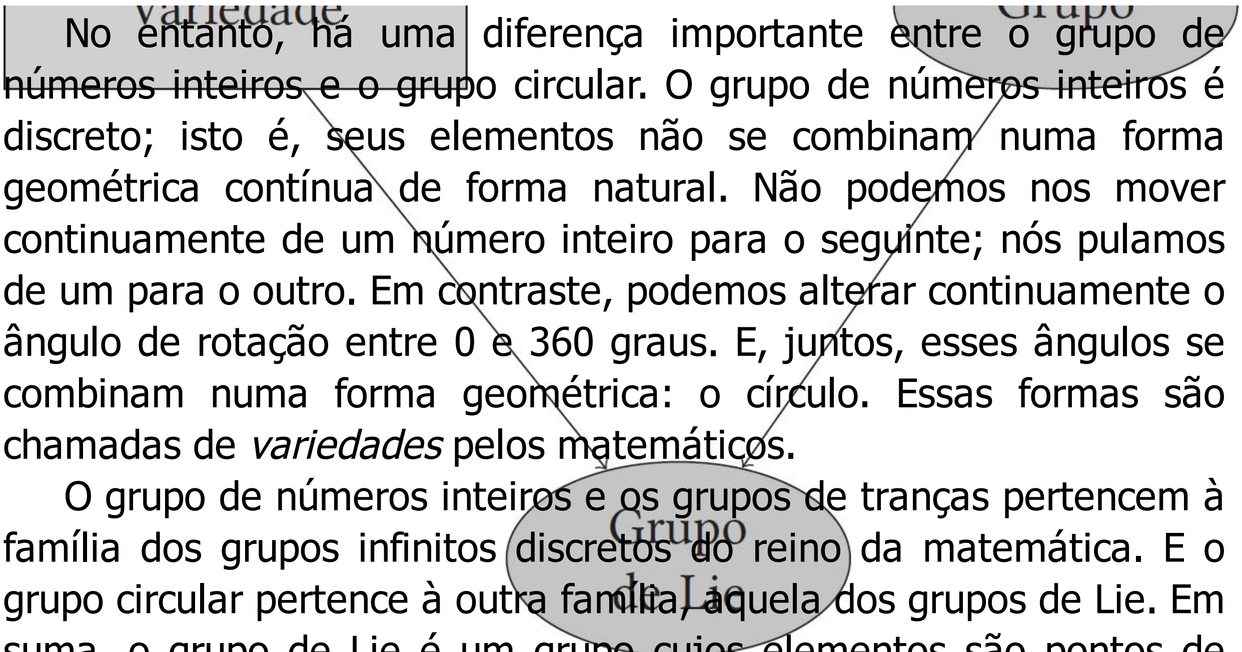
Para explicar o que é a álgebra de Lie, primeiro preciso falar dos "grupos de Lie". Os nomes homenageiam Sophus Lie, matemático norueguês que os inventou.

Os conceitos matemáticos povoam o reino da matemática, exatamente como as espécies povoam o reino animal: eles estão ligados mutuamente, formam famílias e subfamílias, e, muitas vezes, dois conceitos distintos se unem e produzem um fruto.

O conceito de grupo é um bom exemplo. Pense nos grupos como análogos de pássaros, que formam uma classe no reino animal, ou animália (denominada classe das aves). Essa classe é dividida em 23 ordens; cada ordem, por sua vez, divide-se em famílias, e cada família divide-se em gêneros. Por exemplo, a águia-pescadora-africana pertence à ordem Accipitriformes, à família Accipitridae e ao gênero *Haliaeetus* (em comparação com esses nomes, "grupo de Lie" não parece tão exótico!). Da mesma forma, os grupos formam uma grande classe de conceitos matemáticos, e, dentro dela, existem diferentes "ordens", "famílias" e "gêneros".

Por exemplo, há uma ordem de grupos finitos que inclui todos os grupos com uma finidade de elementos. O grupo de simetrias de uma mesa quadrada, que discutimos no capítulo 2, consiste de quatro elementos; assim, é um grupo finito. Da mesma forma, o grupo de Galois de um corpo numérico obtido ao se juntar as soluções de uma equação polinomial aos números racionais é um grupo finito (por exemplo, no caso de uma equação quadrática, possui dois elementos). A classe de grupos finitos é ainda subdividida em famílias, como a família dos grupos de Galois. Outra família consiste de grupos cristalográficos, que são os grupos de simetrías de diversos cristais.

Também há outra ordem: a dos grupos infinitos. Por exemplo, o grupo de números inteiros é infinito, assim como o grupo de tranças B_n, que discutimos no capítulo 5, para cada n definido = 2, 3, 4, … (B_n consiste de tranças com n fios; existe uma infinidade delas). O grupo de rotações de uma mesa redonda, que consiste de todos os pontos de um círculo, também é um grupo infinito.



No entanto, há uma diferença importante entre o grupo de números inteiros e o grupo circular. O grupo de números inteiros é discreto; isto é, seus elementos não se combinam numa forma geométrica contínua de forma natural. Não podemos nos mover continuamente de um número inteiro para o seguinte; nós pulamos de um para o outro. Em contraste, podemos alterar continuamente o ângulo de rotação entre 0 e 360 graus. E, juntos, esses ângulos se combinam numa forma geométrica: o círculo. Essas formas são chamadas de *variedades* pelos matemáticos.

O grupo de números inteiros e os grupos de tranças pertencem à família dos grupos infinitos discretos do reino da matemática. E o grupo circular pertence à outra família, aquela dos grupos de Lie. Em suma, o grupo de Lie é um grupo cujos elementos são pontos de uma variedade. Assim, esse conceito é o fruto do casamento de dois conceitos matemáticos: grupo e variedade.

Eis a árvore de conceitos relacionados com grupo que discutiremos neste capítulo (alguns ainda não foram apresentados, mas serão em breve):

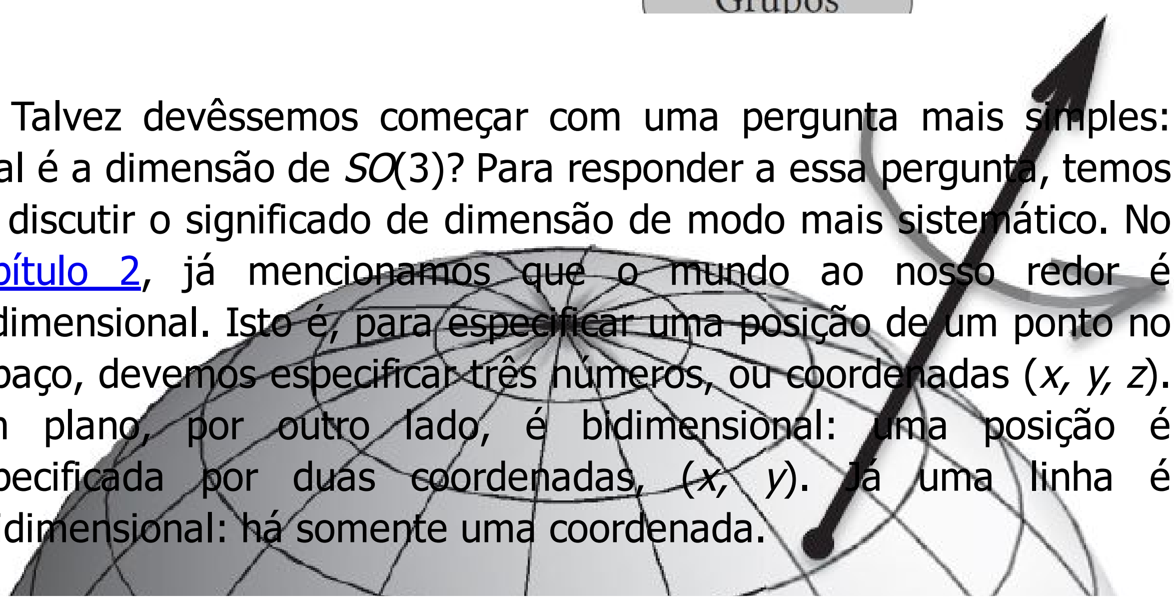
Diversas simetrias que procedem da natureza são descritas pelos grupos de Lie, e é por isso que são tão importantes de se estudar. Por exemplo, o grupo *SU*(3) de que falamos no capítulo 2, utilizado para classificar partículas elementares, é um grupo de Lie.

Outro exemplo de um grupo de Lie é o grupo de rotações de uma esfera. A rotação de uma mesa redonda é determinada por seu ângulo. No entanto, no caso de uma esfera, há mais liberdade: temos de especificar o eixo e também o ângulo de rotação, como exposto na figura. O eixo pode ser qualquer linha passando através do centro da esfera.

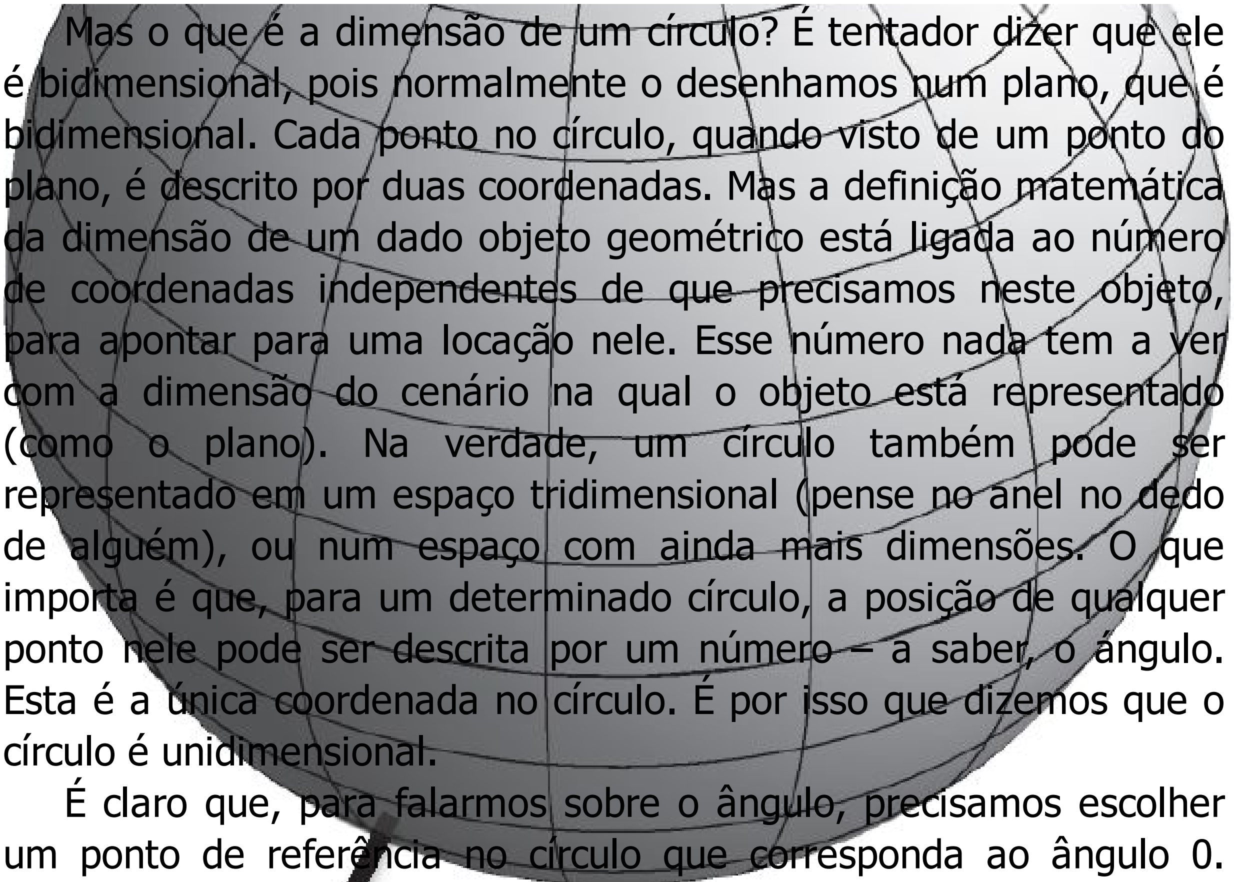
O grupo de rotações da esfera possui um nome na matemática: grupo ortogonal especial do espaço tridimensional, ou, como é geralmente abreviado, *SO*(3). Podemos pensar nas simetrias da esfera como transformações do espaço tridimensional, no qual a esfera está incorporada. Essas transformações são ortogonais, o que significa que preservam todas as distâncias.[1] Incidentalmente, isso nos dá uma representação tridimensional do grupo *SO*(3), conceito que apresentamos no capítulo 2.

Da mesma forma, o grupo de rotações da mesa redonda é denominado *SO*(2); essas rotações são transformações ortogonais especiais do plano, que é bidimensional. Portanto, temos uma representação bidimensional do grupo *SO*(2).

Os grupos *SO*(2) e *SO*(3) não são apenas grupos, mas também variedades (isto é, formas geométricas). O grupo *SO*(2) é o círculo, que é uma variedade. Assim, *SO*(2) é um grupo e uma variedade. E é por isso que afirmamos que é um grupo de Lie. Da mesma forma, elementos do grupo *SO*(3) são pontos de outra variedade, mas mais difíceis de visualizar (note que essa variedade *não* é uma esfera). Lembremos que cada rotação da esfera é determinada pelo eixo e o ângulo de rotação. Agora, observe que cada ponto da esfera origina um eixo de rotação: a linha ligando esse ponto e o centro da esfera. E o ângulo de rotação é igual ao ponto de um círculo. Assim, um elemento do grupo *SO*(3) é determinado por um ponto da esfera (isso define o eixo de rotação), junto com um ponto de um círculo (isso define o ângulo de rotação).



Talvez devêssemos começar com uma pergunta mais simples: qual é a dimensão de *SO*(3)? Para responder a essa pergunta, temos de discutir o significado de dimensão de modo mais sistemático. No capítulo 2, já mencionamos que o mundo ao nosso redor é tridimensional. Isto é, para especificar uma posição de um ponto no espaço, devemos especificar três números, ou coordenadas (*x, y, z*). Um plano, por outro lado, é bidimensional: uma posição é especificada por duas coordenadas, (*x, y*). Já uma linha é unidimensional: há somente uma coordenada.

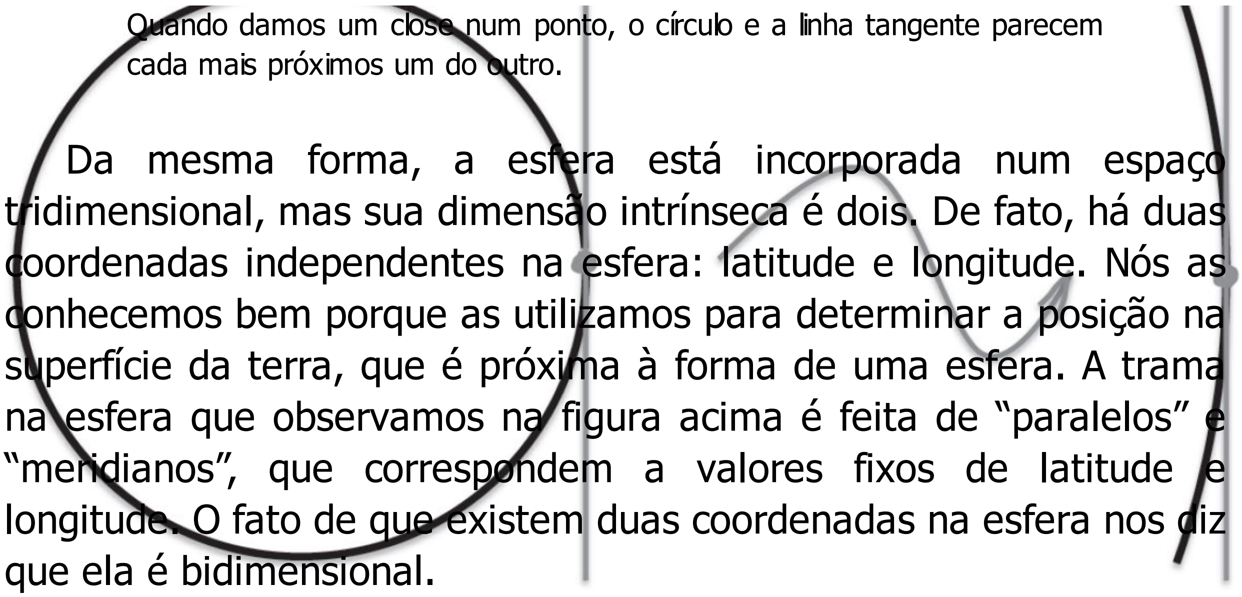


Mas o que é a dimensão de um círculo? É tentador dizer que ele é bidimensional, pois normalmente o desenhamos num plano, que é bidimensional. Cada ponto no círculo, quando visto de um ponto do plano, é descrito por duas coordenadas. Mas a definição matemática da dimensão de um dado objeto geométrico está ligada ao número de coordenadas independentes de que precisamos neste objeto, para apontar para uma locação nele. Esse número nada tem a ver com a dimensão do cenário na qual o objeto está representado (como o plano). Na verdade, um círculo também pode ser representado em um espaço tridimensional (pense no anel no dedo de alguém), ou num espaço com ainda mais dimensões. O que importa é que, para um determinado círculo, a posição de qualquer ponto nele pode ser descrita por um número – a saber, o ângulo. Esta é a única coordenada no círculo. É por isso que dizemos que o círculo é unidimensional.

É claro que, para falarmos sobre o ângulo, precisamos escolher um ponto de referência no círculo que corresponda ao ângulo 0. Assim como, para designar uma coordenada x para cada ponto na linha, nós temos que escolher um ponto de referência nela correspondente a x = 0. Podemos montar um sistema de coordenadas em um dado objeto de diferentes maneiras. Porém, cada um desses sistemas terá o mesmo número de coordenadas, e é esse número que é chamado de dimensão do objeto.

Note que, se dermos um close e observarmos a vizinhança cada vez menor de um ponto do círculo, a curvatura quase desaparecerá. Praticamente não há diferença entre uma pequena vizinhança de um ponto no círculo e uma pequena vizinhança do mesmo ponto na linha tangente ao círculo; esta linha é a aproximação mais próxima do círculo perto desse ponto.

Isso demonstra que o círculo e a linha possuem a mesma dimensão.[2]



Quando damos um close num ponto, o círculo e a linha tangente parecem cada mais próximos um do outro.

Da mesma forma, a esfera está incorporada num espaço tridimensional, mas sua dimensão intrínseca é dois. De fato, há duas coordenadas independentes na esfera: latitude e longitude. Nós as conhecemos bem porque as utilizamos para determinar a posição na superfície da terra, que é próxima à forma de uma esfera. A trama na esfera que observamos na figura acima é feita de “paralelos” e “meridianos”, que correspondem a valores fixos de latitude e longitude. O fato de que existem duas coordenadas na esfera nos diz que ela é bidimensional.

E quanto ao grupo de Lie $SO(3)$? Cada ponto de $SO(3)$ é uma rotação da esfera; assim, temos três coordenadas: o eixo de rotação (que pode ser especificado por um ponto, no qual o eixo perfura a esfera) é descrito por duas coordenadas, e o ângulo de rotação origina a terceira coordenada. Portanto, a dimensão do grupo $SO(3)$ é igual a três.

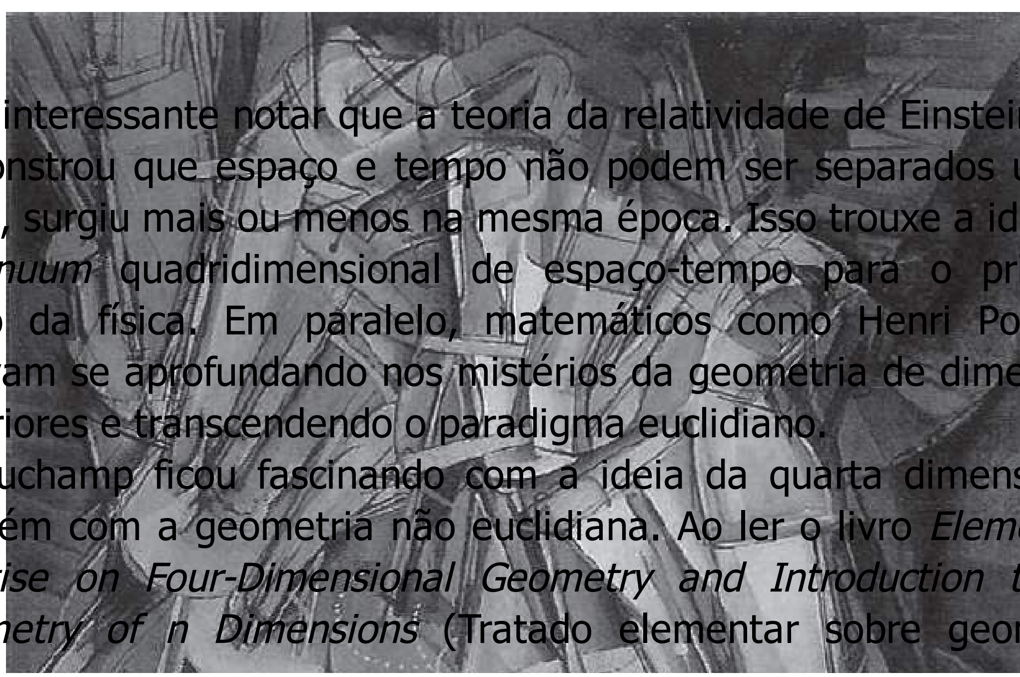
Pensar sobre um grupo de Lie, ou de qualquer variedade, com mais de três dimensões pode ser muito desafiador. Nosso cérebro é condicionado de tal maneira que só conseguimos imaginar formas geométricas, ou variedades, de até três dimensões. Mesmo imaginar a combinação quadridimensional de espaço e tempo é uma tarefa árdua: simplesmente não percebemos o tempo (que constitui a quarta dimensão) como uma dimensão espacial. E quanto a números maiores de dimensões? Como podemos analisar variedades com cinco, seis ou cem dimensões?

Pense sobre isso em termos da seguinte analogia: as obras de arte nos dão interpretações bidimensionais de objetos tridimensionais. Os artistas plásticos pintam projeções bidimensionais desses objetos nas telas e utilizam a técnica da perspectiva para criar a ilusão de profundidade, a terceira dimensão, em suas pinturas. Da mesma forma, podemos imaginar objetos quadridimensionais analisando suas projeções tridimensionais.

Outra maneira mais eficiente de imaginar uma quarta dimensão é pensar em um objeto quadridimensional como uma coleção de “fatias” tridimensionais. Isso seria semelhante a fatiar um pedaço de pão, que é tridimensional, em fatias tão finas que pudéssemos considerá-las bidimensionais.

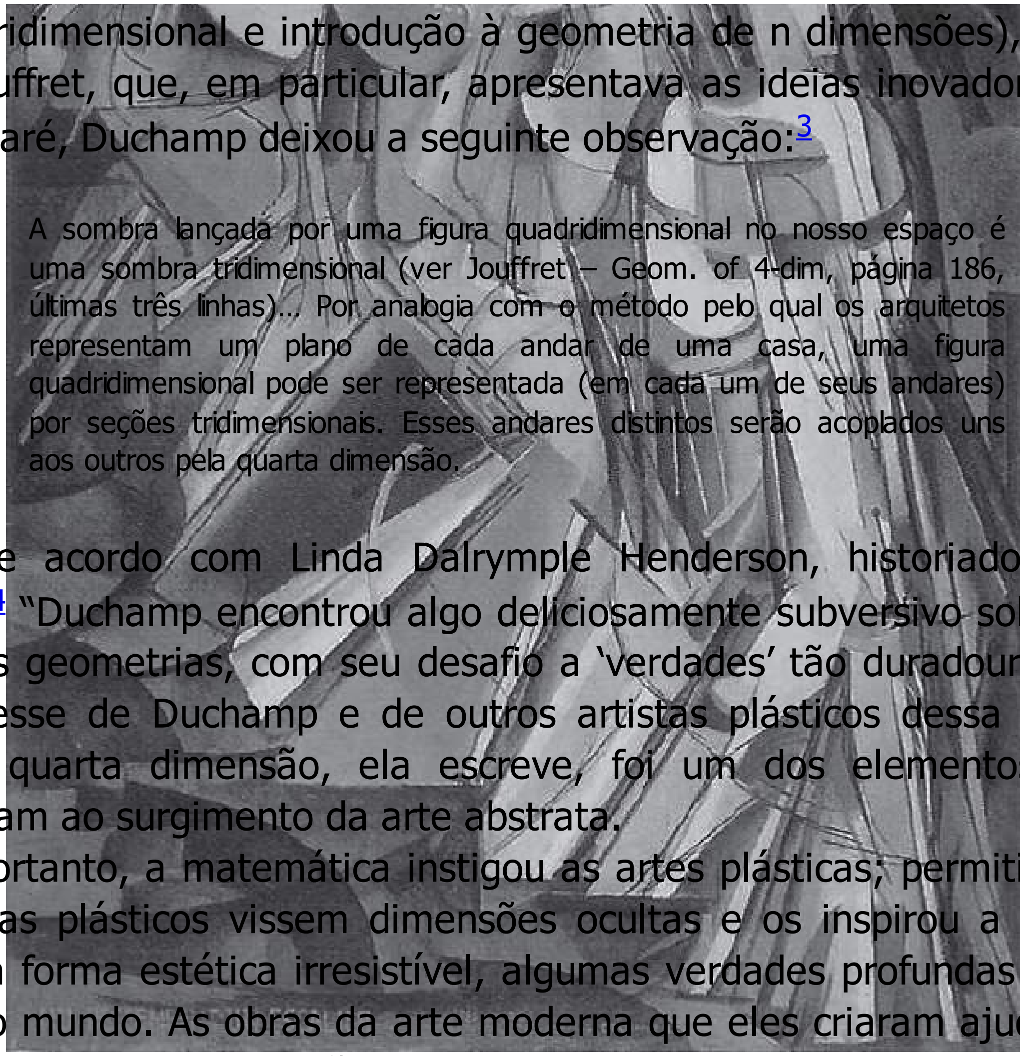
Se a quarta dimensão representar o tempo, então esse “fatiamento” quadridimensional será conhecido como fotografia. De fato, tirar uma foto de uma pessoa em movimento nos dá uma fatia tridimensional de um objeto quadridimensional, representando aquela pessoa no espaço-tempo quadridimensional (essa fatia é, então, projetada num plano). Se tirarmos diversas fotos em sequência, obteremos uma coleção dessas fatias. Se movermos essas fotos rapidamente diante de nossos olhos, poderemos ver aquele movimento. Essa é, claro, a ideia básica do cinema.

Também podemos transmitir a impressão do movimento da pessoa justapondo as imagens. No início do século XX, alguns artistas se interessaram por essa ideia e a utilizaram como uma maneira de incluir a quarta dimensão em suas pinturas, para lhes fornecer dinâmica. Nesse sentido, um marco foi a pintura *Nu descendo uma escada, N° 2,* de Marcel Duchamp, de 1912.



É interessante notar que a teoria da relatividade de Einstein, que demonstrou que espaço e tempo não podem ser separados um do outro, surgiu mais ou menos na mesma época. Isso trouxe a ideia do *continuum* quadridimensional de espaço-tempo para o primeiro plano da física. Em paralelo, matemáticos como Henri Poincaré estavam se aprofundando nos mistérios da geometria de dimensões superiores e transcendendo o paradigma euclidiano.

Duchamp ficou fascinando com a ideia da quarta dimensão, e também com a geometria não euclidiana. Ao ler o livro *Elementary Treatise on Four-Dimensional Geometry and Introduction to the Geometry of n Dimensions* (Tratado elementar sobre geometria



quadridimensional e introdução à geometria de n dimensões), de E. P. Jouffret, que, em particular, apresentava as ideias inovadoras de Poincaré, Duchamp deixou a seguinte observação:[3]

> A sombra lançada por uma figura quadridimensional no nosso espaço é uma sombra tridimensional (ver Jouffret – Geom. of 4-dim, página 186, últimas três linhas)... Por analogia com o método pelo qual os arquitetos representam um plano de cada andar de uma casa, uma figura quadridimensional pode ser representada (em cada um de seus andares) por seções tridimensionais. Esses andares distintos serão acoplados uns aos outros pela quarta dimensão.

De acordo com Linda Dalrymple Henderson, historiadora de arte,[4] "Duchamp encontrou algo deliciosamente subversivo sobre as novas geometrias, com seu desafio a 'verdades' tão duradouras". O interesse de Duchamp e de outros artistas plásticos dessa época pela quarta dimensão, ela escreve, foi um dos elementos que levaram ao surgimento da arte abstrata.

Portanto, a matemática instigou as artes plásticas; permitiu que artistas plásticos vissem dimensões ocultas e os inspirou a expor, numa forma estética irresistível, algumas verdades profundas sobre nosso mundo. As obras da arte moderna que eles criaram ajudaram a elevar nossa percepção da realidade, afetando nossa consciência coletiva. Isso, por sua vez, influenciou as gerações seguintes de matemáticos. Gerald Holton, filósofo da ciência, afirma de modo eloquente:[5]

> De fato, uma cultura se mantém viva pela interação de todas as suas partes. Seu progresso é um processo alquímico, em que todos os diversos ingredientes podem se combinar para formar novas joias. Nesse ponto, imagino que Poincaré e Duchamp estão de acordo comigo e entre si, com os dois tendo, a esta altura, se encontrado certamente em algum lugar naquele hiperespaço que, em suas maneiras distintas, eles amaram tanto.

A matemática nos habilita a perceber a geometria em todas as suas encarnações, figuras e formas. É uma linguagem universal que se aplica igualmente bem em todas as dimensões, quer consigamos visualizar os objetos correspondentes ou não, e nos permite ir bem além de nossa limitada imaginação visual. De fato, Charles Darwin escreveu que a matemática nos dota de um "sentido extra".[6]

Por exemplo, embora não possamos imaginar um espaço quadridimensional, podemos efetivá-lo matematicamente. Simplesmente representamos pontos desse espaço como quádruplos de números (*x, y, z, t*), exatamente como representamos pontos do espaço tridimensional por triplos de números (*x, y, z*). Da mesma maneira, podemos visualizar pontos de um espaço plano *n*-dimensional, para qualquer número natural *n*, como *n*-tupios de números (podemos analisá-los da mesma maneira como linhas de uma planilha, como discutimos no capítulo 2).

Talvez eu precise explicar por que me refiro a esses espaços como sendo planos. Uma linha é evidentemente plana, assim como um plano. No entanto, não é tão evidente que devamos pensar a respeito do espaço tridimensional como plano (observe que não estou falando aqui das diversas variedades curvadas incorporadas no espaço tridimensional, tais como uma esfera ou um toro, mas sim do próprio espaço tridimensional). O motivo é que ele não possui curvatura. A definição matemática precisa de curvatura é sutil (foi dada por Bernhard Riemann, criador das superfícies Riemann), e não entraremos em detalhes agora, pois isso é tangencial aos nossos objetivos imediatos. Uma boa maneira de pensar na planeza do espaço tridimensional é perceber que ele possui três eixos coordenados infinitos, que são perpendiculares entre si, da mesma forma que um plano possui dois eixos coordenados perpendiculares. Igualmente, um espaço *n*-dimensional, com *n* eixos coordenados perpendiculares, não tem curvatura e, portanto, é plano.

Durante séculos, os físicos pensaram que habitamos um espaço tridimensional plano, mas, como discutimos no prefácio, Einstein demonstrou, em sua teoria da relatividade geral, que a gravidade faz o espaço se curvar (a curvatura é pequena, de modo que não a percebemos em nosso cotidiano, mas é diferente de zero). Portanto, nosso espaço é, de fato, um exemplo de uma variedade tridimensional curvada.

Isso suscita a questão de como um espaço curvado pode existir por si mesmo, sem estar incorporado num espaço plano de dimensão superior, da mesma forma que uma esfera está incorporada num espaço plano tridimensional. Estamos acostumados a pensar que o espaço em que vivemos é plano, e, em nossa experiência cotidiana, as formas curvas dão a impressão de aparecer somente nos confins desse espaço plano. No entanto, isso é um mal-entendido, um artefato de nossa percepção limitada da realidade. E a ironia é que o espaço em que vivemos não é plano! A matemática nos oferece uma saída dessa armadilha: como Riemann demonstrou, os espaços curvados existem intrinsecamente, como objetos de sua própria criação, sem um espaço plano que os contenha. O que precisamos para definir esse espaço é uma regra de medir distância entre dois pontos quaisquer desse espaço (essa regra deve satisfazer certas propriedades naturais); isso é o que os matemáticos denominam uma *métrica*. Os conceitos matemáticos de métrica e tensor de curvatura, introduzidos por Riemann, são as bases da teoria da relatividade geral de Einstein.[7]

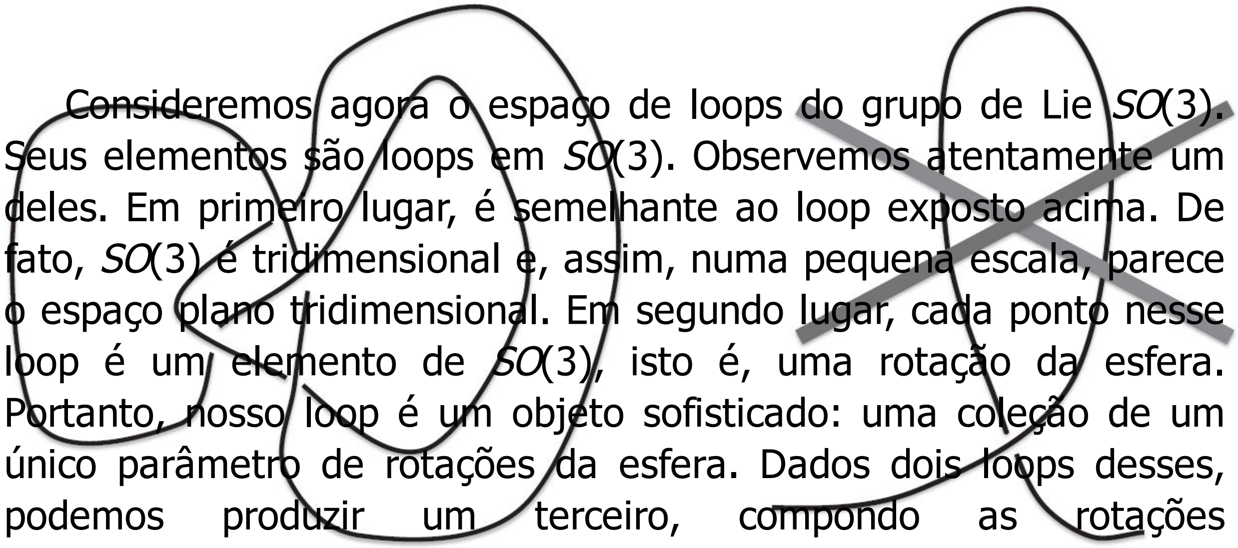
As formas (ou variedades) curvadas podem ter dimensões arbitrariamente altas. Lembremos que o círculo é definido como o conjunto de pontos equidistantes de um determinado ponto num plano (ou, como meu examinador na MGU insistiu, o conjunto de *todos* esses pontos!). Do mesmo modo, uma esfera é o conjunto de todos os pontos equidistantes de um determinando ponto, no espaço tridimensional. Agora, definimos o equivalente de dimensão superior de uma esfera – alguns o denominam hiperesfera – como o conjunto de pontos equidistantes de um determinado ponto, no espaço *n*-dimensional. Essa condição nos oferece uma restrição em relação a *n* coordenadas. Portanto, a dimensão da hiperesfera dentro do espaço *n-dimensional* é (n–1). Além disso, podemos estudar o grupo de Lie de rotações dessa hiperesfera.[8] Ele é denotado por $SO(n)$.

Do ponto de vista da taxonomia dos grupos no reino da matemática, a família dos grupos de Lie é subdividida em dois gêneros: grupos de Lie finitos-dimensionais (como o grupo circular $SO(3)$) e grupos de Lie infinitos-dimensionais. Note que qualquer grupo de Lie finito-dimensional já é infinito, no sentido de que possui uma infinidade de elementos. Por exemplo, o grupo circular dispõe de uma infinidade de elementos (são os pontos do círculo). No entanto, é unidimensional, pois todos os seus elementos podem ser descritos por uma coordenada (o ângulo). Para um grupo de Lie infinito-dimensional, precisamos de uma infinidade de coordenadas para descrever seus elementos. Esse tipo de "dupla infinidade" é realmente difícil de imaginar. No entanto, esses grupos surgem na natureza e, assim, também precisamos estudá-los. Descreverei um exemplo de grupo de Lie infinito-dimensional conhecido como *grupo de loops*.

Para explicar o que é isso, consideremos inicialmente loops no espaço tridimensional. Em suma, um loop é urna curva fechada, como a exposta do lado esquerdo da figura da página seguinte. Já o vimos quando falamos dos grupos de laços (os que chamamos de "nós").[9] Desejo enfatizar que curvas não fechadas, como a exposta do lado direito da figura, *não* são consideradas loops.

Da mesma forma, também podemos considerar loops (isto é, curvas fechadas) dentro de qualquer variedade M. O espaço de todos esses loops é denominado espaço de loops de M.

Como discutiremos com mais detalhes no capítulo 17, esses loops desempenham uma função importante na teoria das cordas. Na física quântica convencional, esses objetos fundamentais são partículas elementares, tais como elétrons ou quarks. São objetos como pontos, sem estrutura interna; isto é, de dimensão zero. Na teoria das cordas, postulase que os objetos fundamentais da natureza são cordas unidimensionais.[10] Uma corda fechada não é nada além de um loop incorporado numa variedade *M* (o espaço-tempo). É por isso que os espaços de loops são o feijão com arroz da teoria das cordas.



Isso é um loop

Isso não é um loop

Consideremos agora o espaço de loops do grupo de Lie *SO*(3). Seus elementos são loops em *SO*(3). Observemos atentamente um deles. Em primeiro lugar, é semelhante ao loop exposto acima. De fato, *SO*(3) é tridimensional e, assim, numa pequena escala, parece o espaço plano tridimensional. Em segundo lugar, cada ponto nesse loop é um elemento de *SO*(3), isto é, uma rotação da esfera. Portanto, nosso loop é um objeto sofisticado: uma coleção de um único parâmetro de rotações da esfera. Dados dois loops desses, podemos produzir um terceiro, compondo as rotações correspondentes da esfera. Portanto, o espaço de loops de *SO*(3) torna-se um grupo. Nós o denominamos grupo de loops de *SO*(3).[11] É um bom exemplo de um grupo de Lie infinito-dimensional; na realidade, não conseguimos descrever seus elementos usando um número finito de coordenadas.[12]

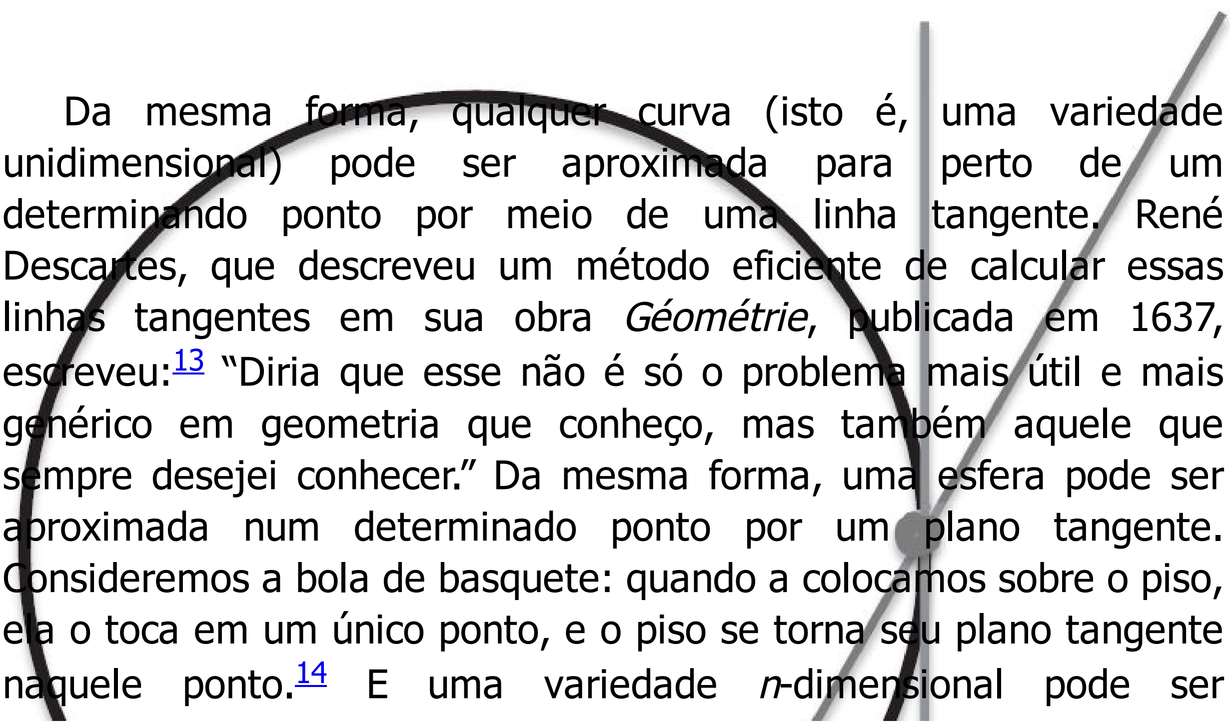
O grupo de loops de qualquer outro grupo de Lie (por exemplo, o *SO*(*n*) de rotações de uma hiperesfera) também é infinito-dimensional. Esses grupos de loops surgem como grupos de simetria na teoria das cordas.

O segundo conceito relevante relativo ao artigo de Feigin e Fuchs que eu estava estudando era o conceito de álgebra de Lie. Cada álgebra de Lie é, em certo sentido, uma versão simplificada de um dado grupo de Lie.

O termo “álgebra de Lie” pode criar alguma confusão. Quando escutamos a palavra “álgebra”, lembramo-nos da matéria que estudamos no ensino médio, que ensinava, entre outras coisas, a solução de equações quadráticas. No entanto, agora a palavra “álgebra” é utilizada numa conotação distinta: como parte da expressão indivisível “álgebra de Lie”, referindo-se aos objetos matemáticos com propriedades específicas. Apesar do que o nome sugere, esses objetos não formam uma família na classe de todas as álgebras, da mesma forma que os grupos de Lie formam uma família na classe de todos os grupos. Mas não importa, todos nós temos de viver com essa inconsistência de terminologia.

Para explicar o que é a álgebra de Lie, primeiro tenho de falar do conceito de *espaço tangente*. Não se preocupe, não estamos saindo pela tangente; seguimos uma das ideias-chave do cálculo, denominada “linearização”, ou seja, a aproximação de formas curvadas por formas lineares ou planas.

Por exemplo, o espaço tangente a um círculo, num determinado ponto, é a linha que passa através desse ponto e é a mais próxima do círculo entre todas as linhas que passam por esse ponto. Já a encontramos anteriormente, quando falamos da dimensão do círculo. A linha tangente simplesmente toca o círculo nesse ponto específico, muito levemente, enquanto todas as outras linhas que passam através desse ponto também cruzam o círculo em outro ponto, como exposto na figura.



Da mesma forma, qualquer curva (isto é, uma variedade unidimensional) pode ser aproximada para perto de um determinando ponto por meio de uma linha tangente. René Descartes, que descreveu um método eficiente de calcular essas linhas tangentes em sua obra *Géométrie*, publicada em 1637, escreveu:[13] “Diria que esse não é só o problema mais útil e mais genérico em geometria que conheço, mas também aquele que sempre desejei conhecer.” Da mesma forma, uma esfera pode ser aproximada num determinado ponto por um plano tangente. Consideremos a bola de basquete: quando a colocamos sobre o piso, ela o toca em um único ponto, e o piso se torna seu plano tangente naquele ponto.[14] E uma variedade *n*-dimensional pode ser aproximada num determinado ponto por um espaço *n*-dimensional plano.

Agora, em qualquer grupo de Lie, temos um ponto especial, que é o elemento identidade desse grupo. Consideramos o espaço tangente relativo ao grupo de Lie nesse ponto – e, *voilà*, essa é a álgebra de Lie referente a esse grupo de Lie. Assim, cada grupo de Lie possui sua própria álgebra de Lie, que é como uma irmã mais nova dele.[15]

Por exemplo, o grupo circular é um grupo de Lie, e o elemento de identidade é um ponto específico nesse círculo,[16] correspondente ao ângulo 0. Nesse ponto, a linha tangente é, portanto, a álgebra de Lie do grupo circular. Infelizmente, não podemos desenhar uma figura do grupo *SO*(3) e seu espaço tangente porque os dois são tridimensionais. No entanto, a teoria matemática que descreve os espaços tangentes é estabelecida de tal maneira que funciona igualmente bem em todas as dimensões. Se quisermos imaginar como as coisas funcionam, podemos modelá-la em exemplos unidimensionais ou bidimensionais (como um círculo ou uma esfera). Nesse caso, utilizamos variedades de dimensão inferior como metáforas para variedades de dimensão superior mais complicadas. Mas não precisamos fazer isso; a linguagem da matemática nos habilita a transcender nossa intuição visual limitada. Matematicamente, a álgebra de Lie de um grupo de Lie *n*-dimensional é um espaço plano *n*-dimensional, também conhecido como espaço vetorial.[17]

Há ainda mais. A operação de multiplicação num grupo de Lie origina uma operação em sua álgebra de Lie: dados dois elementos quaisquer da álgebra de Lie, podemos construir um terceiro. As propriedades dessa operação são mais difíceis de descrever do que as propriedades de multiplicação num grupo de Lie, e não são essenciais para nós no momento.[18] Um exemplo, que seria familiar para aqueles leitores que estudaram cálculo vetorial, é a operação de *produto vetorial* no espaço tridimensional.[19] Se você conhece essa operação, pode ter se espantado com suas propriedades de aparência estranha. E adivinhe: essa operação realmente converte o espaço tridimensional numa álgebra de Lie!

No fim das contas, essa é, de fato, a álgebra de Lie do grupo de Lie *SO*(3). Assim, a operação de aparência esotérica de produto vetorial é herdada da regra de composição das rotações da esfera.

Você pode estar se perguntando por que nos preocupamos com as álgebras de Lie se a operações nelas têm uma aparência tão estranha. Por que não se apegar aos grupos de Lie? O motivo principal é que, ao contrário de um grupo de Lie, que é geralmente curvado (como um círculo), a álgebra de Lie é um espaço plano (como uma linha, um plano etc.). Isso torna o estudo das álgebras de Lie muito mais simples que o dos grupos de Lie.

Por exemplo, podemos falar das álgebras de Lie dos grupos de loop.[20] Essas álgebras de Lie, que devemos considerar como versões simplificadas dos grupos de loops, são denominadas *álgebras de Kac-Moody*, em homenagem a dois matemáticos: Víctor Kac (natural da Rússia, emigrou para os Estados Unidos e é atualmente professor no MIT) e Robert Moody (natural da Grã-Bretanha, emigrou para o Canadá e atualmente leciona na Universidade de Alberta). Eles começaram a investigar essas álgebras de Lie independentemente, em 1968. Desde então, a teoria das álgebras de Kac-Moody foi uma das áreas mais quentes e de desenvolvimento mais rápido da matemática.[21]

Foram essas álgebras de Kac-Moody que Fuchs sugeriu como tópico de meu próximo projeto de pesquisa. Quando comecei a tomar conhecimento de tudo isso, constatei que tinha de estudar muito antes de poder alcançar o ponto em que poderia realizar algo sozinho. Mas estava fascinando com o assunto.

Fuchs vivia na zona nordeste de Moscou, não longe de uma estação onde eu podia pegar um trem para minha cidade natal. Costumava ir para casa todas as sextas-feiras para passar o fim de semana. Assim, Fuchs sugeriu que eu aparecesse em sua casa todas as sextas-feiras ás 17h, e pegasse o trem após nosso encontro. Em geral, eu trabalhava com Fuchs por cerca de três horas (período de tempo no qual ele também me oferecia o jantar) e, em seguida, pegava o último trem, chegando em casa por volta de meia-noite. Esses encontros desempenharam um grande papel em minha educação matemática. Nós nos reuníamos semana após semana, durante todo o semestre do outono de 1986, e, depois, também no semestre da primavera de 1987.

Só em janeiro de 1987 acabei de ler o longo artigo de Feigin e Fuchs, e senti que podia começar a trabalhar em meu projeto de pesquisa. Nesta época, consegui obter uma licença para frequentar a Biblioteca de Ciências de Moscou, um imenso depósito de livros e publicações (muitos dos quais a biblioteca de Kerosinka também tinha), não só em russo, mas também em outras línguas. Comecei a frequentá-la regularmente para estudar dezenas de publicações de matemática, procurando artigos sobre álgebras de Kac-Moody e assuntos afins.

Eu também estava ansioso por aprender a respeito de suas aplicações na física quântica, que era, claro, uma grande atração para mim. Como mencionei antes, as álgebras de Kac-Moody desempenham um papel importante na teoria das cordas, mas também aparecem como simetrias de modelos da física quântica bidimensional. Vivemos num espaço tridimensional e, assim, modelos realistas que descrevem nosso mundo devem ser tridimensionais. Se incluirmos o tempo, obteremos quatro dimensões. No entanto, matematicamente, nada nos impede de construir e analisar modelos que descrevem mundos de outras dimensões. Os modelos em dimensões menores que três são mais simples, e temos uma maior probabilidade de resolvê-los. Então, podemos utilizar o que aprendemos para enfrentar os mais sofisticados modelos tridimensionais e quadrimensionais.

Essa é, de fato, uma das ideias principais do assunto denominado “física matemática”, ou seja, modelos de estudo de diversas dimensões, que podem não ser aplicáveis diretamente em nosso mundo físico, mas compartilham algumas das características importantes dos modelos realistas.

Alguns desses modelos de dimensão baixa também possuem aplicações no mundo real. Por exemplo, uma camada metálica muito fina pode ser considerada um sistema bidimensional e, portanto, pode ser descrita de maneira eficaz por um modelo bidimensional. Um exemplo famoso é o assim chamado modelo de Ising de interação de partículas que ocupam os nós de uma estrutura bidimensional. A solução exata do modelo de Ising por Lars Onsager proporcionou *insights* valiosos a respeito do fenômeno de magnetização espontânea, ou ferromagnetismo. No cerne do cálculo de Onsager estava uma simetria oculta desse modelo, enfatizando mais uma vez o papel importante da simetria no entendimento dos sistemas físicos. Posteriormente, entendeu-se que essa simetria é descrita pela assim chamada álgebra de Virasoro, parente próxima da álgebra de Kac-Moody[22] (na realidade, a álgebra de Virasoro era o assunto principal do artigo de Feigin e Fuchs que eu estava estudando).

Também há uma grande classe de modelos desse tipo, em que as simetrias são descritas pela álgebra de Kac-Moody apropriada. A teoria matemática da álgebra de Kac-Moody é essencial para o entendimento desses modelos.[23]

A biblioteca de Kerosinka assinava uma publicação intitulada *Referativny Zhurnal*, ou seja, *Revista de Referências*. Essa revista, de periodicidade mensal, trazia análises críticas curtas a respeito de todos os artigos novos, em todas as línguas, organizados por assunto, com um resumo de cada um. Comecei a lê-la com regularidade, e ela se revelou uma valiosa fonte de informações. Todos os meses, um novo volume com artigos de matemática chegava, e eu consultava as seções em busca de algo interessante. Se encontrasse algo que parecia estimulante, anotava as referências bibliográficas e as consultava em minha próxima visita à Biblioteca de Ciências de Moscou. Dessa maneira, descobri coisas fascinantes.

Certo dia, virando as páginas da *Referativny Zhurnal*, topei com uma análise crítica de um artigo de Minoru Wakimoto, matemático japonés, que foi publicado em *Communications in Mathematical Physics*, uma das publicações a que eu estava prestando bastante atenção. A análise não dizia muita coisa, mas o título referia-se à álgebra de Kac-Moody associada com o grupo de rotações da esfera $SO(3)$. Assim, anotei a referência e, na minha próxima visita à Biblioteca de Ciências, li o artigo.

Nele, o autor construiu novas realizações a respeito da álgebra de Kac–Moody associada ao $SO(3)$. Para dar a ideia central do que se trata, utilizarei a linguagem da física quântica (que é pertinente aquí porque a álgebra de Kac–Moody descreve simetrias de modelos de física quântica). Os modelos quânticos realistas, como aqueles que descrevem a interação de partículas elementares, são bastante complicados. No entanto, podemos elaborar "modelos de campo-livre" idealizados e mais simples, em que a interação não existe ou é quase inexistente. Nesses modelos, os campos da teoria quântica são mutuamente "livres", daí o nome. Frequentemente, é possível imaginar um modelo quântico complicado e, portanto, mais interessante dentro de um desses modelos de campo-livre. Isso nos permite dissecar e desconstruir os modelos complicados, e realizar cálculos que não são acessíveis normalmente. Essas realizações são muito úteis como resultado. No entanto, para modelos quânticos com álgebras de Kac–Moody como simetrias, os exemplos conhecidos dessas realizações de campo-livre eram bastante limitados em escopo.

Ao ler o artigo de Wakimoto, percebi de imediato que o resultado podia ser interpretado, oferecendo a realização mais ampla possível do campo-livre no caso da álgebra de Kac–Moody mais simples, aquela associada ao $SO(3)$. Entendi a importância desse resultado, e isso me fez pensar: de onde vem essa realização? Há uma maneira de generalizá-la para outras álgebras de Kac–Moody? Senti que estava apto a enfrentar essas questões.

Como descrever o entusiasmo que senti quando vi esse belo trabalho e percebi seu potencial? Suponho que seja como quando, após uma longa jornada, de repente o pico de uma montanha surge à plena vista. Você respira fundo, capta a beleza majestosa e tudo o que você consegue dizer é: "Uau!" É o momento da revelação. Você ainda não alcançou o cume, nem mesmo conhece os obstáculos situados à frente, mas sua fascinação é irresistível, e você já se imagina no topo. Ele é seu, para ser conquistado agora. Mas você tem a força e o vigor para fazer isso?

Capítulo 11

Conquistando o topo

No verão, estava pronto para compartilhar minhas conclusões com Fuchs. Sabia que ele sentiria o mesmo entusiasmo em relação ao artigo de Wakimoto que eu sentira. Fui ver Fuchs em sua datcha, mas quando cheguei, ele me disse que havia um pequeno problema: marcara encontro comigo e com seu colaborador e ex-aluno Boris Feigin no mesmo dia – de forma não intencional, segundo ele, embora eu não acreditasse (muito tempo depois, Fuchs confirmou que foi realmente intencional).

Fuchs me apresentara a Feigin alguns meses antes. Foi antes de um dos seminários de Gelfand, pouco depois de eu concluir meu artigo sobre grupos de tranças e ter começado a leitura do artigo de Feigin e Fuchs. Estimulado por Fuchs, pedi sugestões de outras leituras para Feigin. Na ocasião, Boris Lvovich, como eu o tratava, tinha 33 anos, mas já era considerado uma das grandes estrelas da comunidade matemática de Moscou. Usando uma calça jeans e tênis gastos, ele pareceu bastante tímido. Óculos de lentes grossas e grandes cobriam seus olhos, e, na maior parte de nossa conversa, Feigin olhou para baixo, para evitar qualquer contato visual. Obviamente, eu também era tímido e inseguro, apenas um jovem estudante, e ele já era um matemático famoso. Assim, não foi o encontro mais envolvente. No entanto, de vez em quando, ele levantava os olhos e olhava para mim com um sorriso aberto e afável. Isso quebrou o gelo. Pude sentir uma gentileza autêntica.

No entanto, a sugestão inicial de Feigin me surpreendeu: ele me disse que eu deveria ler o livro *Statistical Physics,* de Landau e Lifshitz, uma perspectiva que achei absolutamente terrível na época, em parte por causa da semelhança, em tamanho e peso, entre esse livro bem grosso e o compêndio sobre a história do Partido Comunista que todos nós tínhamos de estudar na escola.

Em defesa de Feigin, aquele foi um bom conselho – *Statistical Physics* é realmente um livro importante, e, com o tempo, minha pesquisa se voltou exatamente para aquela direção (embora tenha de admitir, para minha vergonha, que ainda não li o livro). No entanto, na ocasião, essa ideia não me estimulou; até certo ponto, pelo fato de que nossa conversa inicial não foi a lugar nenhum. Jamais voltei a conversar com Feigin, além de dizer "oi" quando o via no seminário de Gelfand, até aquele dia na datcha de Fuchs.

Pouco depois de minha chegada, vi Feigin pela janela descendo de sua bicicleta. Após os cumprimentos e alguma conversa informal, nós três nos sentamos junto à mesa redonda da cozinha, e Fuchs me perguntou:

– Então, quais são as novidades?

– Bem… Descobri esse artigo interessante de um matemático japonês, Wakimoto.

– Sei… – Fuchs se virou para Feigin e perguntou: – Você conhece?

Feigin fez um gesto negativo com a cabeça, e Fuchs disse para mim:

– Ele sempre sabe tudo… Mas é bom que esse artigo seja desconhecido para ele, pois será interessante que ele lhe ouça.

Comecei a descrever o trabalho de Wakimoto para os dois. Como previsível, ambos ficaram muito interessados. Foi a primeira vez que tive a oportunidade de discutir conceitos matemáticos em profundidade com Feigin, e, imediatamente, tive a sensação de que entramos em sintonia. Ele me escutou com atenção e fez todas as perguntas certas. Sem dúvida, entendeu a importância daquele material e, embora sua atitude se mantivesse descontraída e casual, aparentemente ficou entusiasmado. Na maior parte do tempo, Fuchs foi mero espectador, mas tenho certeza de que se sentiu feliz ao ver que seu plano secreto de me aproximar de Feigin funcionou tão bem. Realmente, foi uma conversa incrível. Senti que estava na iminência de algo importante.

Aparentemente, Fuchs sentiu o mesmo. Quando estava indo embora, ele me disse:

– Parabéns. Gostaria que este fosse o seu artigo. Mas acho que agora você está pronto para levá-lo a um novo patamar.

Voltei para casa e continuei a estudar as questões levantadas pelo artigo de Wakimoto. Ele não dava nenhuma explicação sobre suas fórmulas. Eu estava fazendo o equivalente a um trabalho de perícia forense, tentando descobrir as pistas de uma visão geral por trás de suas fórmulas.

Alguns dias depois, a visão começou a emergir. Num *insight,* enquanto andava de um lado para o outro no dormitório da faculdade, entendi que as fórmulas de Wakimoto provinham da geometria. Foi uma descoberta surpreendente, pois a abordagem de Wakimoto era totalmente algébrica; não havia nenhuma sugestão referente à geometria.

Para explicar minha interpretação geométrica, vamos rever o grupo de Lie $SO(3)$ de simetrias da esfera e seu grupo de loops. Como explicado no capítulo anterior, um elemento do grupo de loops de $SO(3)$ é uma coleção de elementos de $SO(3)$; um elemento de $SO(3)$ para cada ponto do loop. Cada um desses elementos de $SO(3)$ atua na esfera por meio de uma rotação específica. Isso implica que cada elemento do grupo de loops de $SO(3)$ origina uma simetria do espaço de loops da esfera.[1]

Entendi que podia utilizar essa informação para obter uma representação da álgebra de Kac-Moody associada ao $SO(3)$. Isso ainda não nos dá as fórmulas de Wakimoto. Para obtê-las, temos de modificar as fórmulas de maneira até certo ponto radical. Imagine virar um casaco pelo avesso. Podemos fazer isso em relação a qualquer casaco, mas, na maioria dos casos, ele se torna inutilizável; não podemos usá-lo em público. No entanto, há casacos que podem ser usados dos dois lados. E o mesmo era válido para as fórmulas de Wakimoto.

Munido desse novo entendimento, tentei de imediato generalizar as fórmulas para outras álgebras de Kac-Moody mais complicadas. O primeiro passo, geométrico, funcionou bem, exatamente como no caso de $SO(3)$. No entanto, quando tentei "virar pelo avesso" as fórmulas, obtive algo absurdo. A matemática resultante simplesmente não fazia adição. Procurei remexer nas fórmulas, mas não consegui resolver o problema. Tive de considerar a possibilidade real de que essa construção só funcionava para $SO(3)$, e não para álgebras de Kac-Moody mais gerais. Não havia jeito de saber com certeza se o problema tinha uma solução e, em caso positivo, se a solução podia ser obtida mediante os meios disponíveis. Simplesmente tinha de trabalhar duro e esperar o melhor.

Uma semana se passou, e era hora de me encontrar com Fuchs de novo. Queria lhe falar de meus cálculos e pedir conselhos. Ao chegar à datcha, Fuchs me disse que sua mulher tinha de ir a Moscou para realizar algumas tarefas, e ele tinha de tomar conta de suas duas jovens filhas.

– Mas, sabe de uma coisa – ele disse –, Feigin veio aqui ontem. Ele está muito empolgado a respeito das coisas que você nos falou na semana passada. Por que você não vai visitá-lo? A datcha dele fica a apenas quinze minutos daqui. Eu lhe disse que o mandaria para lá hoje. Ele está te esperando.

Fuchs me explicou como chegar à datcha de Feigin, e fui para lá.

De fato, Feigin estava me esperando. Ele me cumprimentou calorosamente e me apresentou à sua encantadora mulher, Inna, e aos seus três filhos: Roma e Zhenya, dois meninos bem agitados, de 8 e 10 anos, respectivamente, e Lisa, adorável menina de 2 anos. Naquele momento, não tinha ideia de quão próximo ficaria nos próximos anos dessa maravilhosa família.

A mulher de Feigin nos ofereceu chá e bolo, e nos sentamos na varanda. Era uma bela tarde de verão, com os raios do sol se projetando através das árvores frondosas e os pássaros trinando; uma idílica paisagem rural. Mas, claro, a conversa rapidamente se concentrou na construção de Wakimoto.

No fim das contas, Feigin também estava pensando nela e seguindo linhas parecidas. No início de nossa conversa, de fato, ficamos basicamente completando as frases um do outro. Era uma sensação especial: ele me entendia completamente, e vice-versa.

Comecei a lhe falar do meu insucesso em generalizar a construção para outras álgebras de Kac–Moody. Feigin escutou atentamente e, após ficar em silêncio por algum tempo, refletindo, chamou minha atenção para um ponto importante que eu deixara escapar. Na tentativa de generalizar a construção de Wakimoto, precisamos descobrir uma generalização apropriada da esfera: a variedade sobre a qual $SO(3)$ atua por simetrias. No caso de $SO(3)$, essa alternativa é praticamente única. No entanto, para os outros grupos, há muitas alternativas. Em meus cálculos, admitira como certo que as generalizações naturais da esfera eram os assim chamados espaços projetivos. Contudo, aquele não era necessariamente o caso; o fato de que eu não estava chegando a lugar nenhum com aquilo podia simplesmente ser porque minha alternativa de espaços era equivocada.

Como expliquei acima, no final, precisei virar as fórmulas “pelo avesso”. Toda a construção dependia da expectativa de que, milagrosamente, as fórmulas resultantes ainda seriam corretas. No caso de Waki- moto, isso aconteceu para o grupo mais simples

SO(3). Meus cálculos indicaram que, para os espaços projetivos, aquele não era o caso, mas aquilo não significava que uma construção melhor não poderia ser encontrada. Feigin sugeriu que eu tentasse as assim chamadas variedades de bandeiras.[2]

A variedade de bandeiras para o grupo *SO*(3) é a esfera; assim, para os outros grupos, esses espaços podem ser vistos como substitutos naturais dela. No entanto, as variedades de bandeiras são mais ricas e mais versáteis que os espaços projetivos; dessa maneira, havia uma chance de que um análogo da construção de Wakimoto pudesse funcionar para elas.

Já estava escurecendo, ou seja, era hora de voltar para casa. Combinamos de nos encontrar novamente na próxima semana e, em seguida, despedi-me da família de Feigin e me dirigi para a estação ferroviária.

Na viagem de trem para casa, num vagão vazio, com as janelas abertas deixando entrar o ar quente do verão, eu não conseguia parar de pensar sobre o problema. Tinha de tentar resolvê-lo, ali mesmo, naquele exato momento. Peguei uma caneta e um bloco de papel e comecei a escrever as fórmulas para a variedade de bandeiras mais simples. O vagão antigo, fazendo um ruído intenso, chacoalhava de um lado para o outro, impedindo-me de segurar minha caneta com firmeza; assim, as fórmulas que escrevia ficavam todas bagunçadas. Mal conseguia ler o que estava escrevendo. No entanto, no meio do caos, havia um padrão emergindo. Sem dúvida, as coisas funcionavam melhor para as variedades de bandeiras que para os espaços projetivos que tentara, em vão, domar na semana anterior.

Mais algumas linhas de cálculos e… Eureca! Estava funcionando. As fórmulas “às avessas” funcionavam tão bem quanto no trabalho de Wakimoto. A construção se generalizou maravilhosamente. Fiquei tomado de alegria: aquilo era demais. Eu consegui. Descobri novas realizações de campo-livre das álgebras de Kac-Moody!

Na manhã seguinte, conferi meus cálculos cuidadosamente. Tudo deu certo. Não havia telefone na datcha de Feigin e, assim, não podia ligar para ele e contar minhas novas constatações. Comecei a escrevê-las na forma de uma carta e, quando nos encontramos na semana seguinte, falei dos novos resultados.

Esse foi o começo de nosso trabalho conjunto. Feigin se tornou meu professor, mentor, conselheiro e amigo. Inicialmente, eu o chamava de Boris Lvovich, da maneira antiquada russa, incluindo o patronímico. No entanto, posteriormente, ele insistiu que eu o chamasse de Borya, uma forma muito mais informal.

Tive uma sorte incrível com meus professores. Evgeny Evgenievich me apresentou a beleza da matemática e conseguiu que eu me apaixonasse por ela. Ele também me ajudou a aprender os conceitos básicos. Fuchs me salvou depois da catástrofe do exame vestibular na MGU e pôs em movimento minha hesitante carreira na matemática. Ele me conduziu ao meu primeiro projeto sério, dando-me confiança em minhas habilidades, e me encaminhou a uma área de pesquisa empolgante, na interface entre a matemática e a física. Finalmente, eu estava pronto para as altas esferas. Borya demonstrou ser o melhor conselheiro que eu podia sonhar naquela fase da minha jornada. Era como se minha carreira na matemática estivesse se dinamizando.

Indubitavelmente, Borya é um dos matemáticos mais originais de sua geração, no mundo inteiro, um visionário que possui a noção mais profunda da matemática. Ele me orientou no país das maravilhas da matemática moderna, cheio de beleza mágica e harmonia sublime.

Agora que tenho meus alunos, valorizo ainda mais o que Borya fez por mim (e o que Evgeny Evgenievich e Fuchs fizeram por mim antes). É duro ser professor! Em vários aspectos, é como ter um filho. Você tem de se sacrificar muito, não pedindo nada em troca. Claro que as recompensas também podem ser enormes. Mas como decidir a direção a indicar aos alunos, quando lhes dar assistência e quando jogá-los em águas profundas e deixá-los aprender a nadar sozinhos? Isso é arte. Ninguém pode lhe ensinar como fazer isso.

Borya se preocupou muito comigo e com meu desenvolvimento como matemático. Ele nunca me disse o que fazer, mas conversar e aprender com ele sempre me deu um senso de direção. De algum modo, ele foi capaz de garantir que eu sempre soubesse o que queria fazer em seguida. E, com Borya ao meu lado, sempre senti a confiança de que estava no caminho certo. Tive muita sorte de tê-lo como professor.

Eu já estava no início do semestre de outono de 1987, meu quarto ano em Kerosinka. Tinha 19 anos, e minha vida jamais fora tão empolgante. Ainda estava morando no alojamento dos estudantes, divertindo-me com meus amigos, apaixonando-me... Também ficava em dia com os meus estudos. Naquela altura, não comparecia à maioria das minhas aulas e estudava sozinho para os exames (ocasionalmente, apenas alguns dias antes da prova). Tirava sempre notas A – a única exceção foi um B em Economia Política Marxista (que coisa feia!).

Da maioria das pessoas, mantinha em segredo o fato de que tinha uma "segunda vida", que consumia a maior parte do meu tempo e da minha energia: meu trabalho matemático com Borya.

Em geral, encontrava-me com Borya duas vezes por semana. O trabalho oficial dele era no Instituto de Física do Estado Sólido, mas ele não tinha muita coisa para fazer ali, e só tinha de aparecer uma vez por semana. Nos outros dias, trabalhava no apartamento da sua mãe, que ficava a dez minutos de caminhada da sua casa. Também era perto de Kerosinka e do meu alojamento. Era nosso local de encontro usual. Eu o encontrava no final da manhã ou no começo da tarde, e nós trabalhávamos em nossos projetos, às vezes durante todo o dia. A mãe de Borya chegava do trabalho no começo da noite e nos servia o jantar; frequentemente, íamos embora juntos por volta das 21h ou 22h.

Como nossa primeira missão, Borya e eu escrevemos um resumo de nossos resultados e o enviamos à revista *Russian Mathematical Surveys.* Foi veiculado dentro de um ano; muito rápido para os padrões das publicações de matemática.[3] Depois de conquistar isso, Borya e eu nos concentramos no desenvolvimento adicional de nosso projeto. Nossa construção era de grande eficácia e abriu diversas novas direções de pesquisa. Utilizamos nossos resultados para entender melhor as representações das álgebras de Kac–Moody. Nosso trabalho nos capacitou para desenvolver uma realização de campo-livre de modelos quânticos bidimensionais. Permitiu-nos fazer cálculos nesses modelos que não estavam acessíveis antes, o que, em pouco tempo, deixou os físicos interessados em nosso trabalho.

Foi uma época muito estimulante. Nos dias em que Borya e eu não nos encontrávamos, eu trabalhava sozinho; em Moscou, durante a semana, e, em casa, nos finais de semana. Continuava frequentando a Biblioteca de Ciências e devorando cada vez mais livros e artigos sobre assuntos afins. Estava almoçando e jantando a matéria. Era como se eu estivesse submerso nesse belo universo paralelo, e quisesse ficar ali, aprofundando-me cada vez mais nesse sonho. Depois de cada nova descoberta, de cada nova ideia, esse mundo mágico estava se tornando mais e mais a minha casa.

No entanto, no outono de 1988, quando entrei no quinto e último ano dos meus estudos em Kerosinka, fui arrastado de volta à realidade. Era o momento de começar a pensar no futuro. Embora estivesse entre os melhores alunos de minha turma, minhas perspectivas pareciam lúgubres. O antissemitismo excluía os graduados da escola de pós-graduação e dos melhores empregos disponíveis. Não ter *propiska,* ou seja, visto de residência em Moscou, complicava as coisas ainda mais. O dia do juízo final estava chegando.

Capítulo 12

Árvore do conhecimento

Embora soubesse que jamais poderia seguir carreira acadêmica, continuei praticando a matemática. Mark Saul fala a respeito disso em seu artigo[1] (referindo-se a mim pela forma diminutiva do meu nome, Edik):

> O que impeliu Edik e outros a continuar, como tantos salmões nadando contra a corrente? Havia todos os indícios de que a discriminação que sofreram no cenário universitário continuaria em suas vidas profissionais. Então, por que eles se prepararam de maneira tão intensiva, e contra essas adversidades, por uma carreira na matemática?

Não esperava receber nada em troca, a não ser a alegria e a paixão puras da atividade intelectual. Queria dedicar minha vida à matemática simplesmente porque amava fazer aquilo.

Na vida estagnada do período soviético, os jovens de talento não podiam investir sua energia em negócios; a economia não tinha setor privado. Ao contrário, ela estava sob rígido controle governamental. Da mesma forma, a ideologia comunista controlava a atividade intelectual nas esferas de humanidades, economia e ciências sociais. Todos os livros ou artigos dessas áreas tinham que começar com citações de Marx, Engels e Lenin, e, de modo inequívoco, apoiar o ponto de vista marxista do assunto. A única maneira de escrever um artigo sobre filosofia estrangeira, digamos, seria apresentá-lo como uma condenação dos "pontos de vista burgueses reacionários" dos filósofos. Aqueles que não seguiam essas regras estritas eram condenados e perseguidos. O mesmo se aplicava nas artes plásticas, na música, na literatura e no cinema. Qualquer coisa que pudesse ser, até mesmo remotamente, considerada crítica da sociedade, política ou estilo de vida soviético – ou que simplesmente se desviasse dos cânones do "realismo socialista" – era sumariamente censurada. Os escritores, compositores e diretores que se atreviam a seguir suas visões artísticas eram banidos, e seus trabalhos eram arquivados ou destruídos.

Diversas áreas da ciência também eram dominadas pela linha do partido. Por exemplo, a genética foi banida durante muitos anos porque seus resultados eram considerados contrários aos ensinamentos do marxismo. Mesmo a linguística não era poupada: depois que Stalin, que se considerava um especialista nesse assunto (e também em muitos outros), escreveu seu ensaio infame *On Certain Questions of Linguistics,* o ramo, em grande medida, foi reduzido à interpretação desse tratado sem sentido. Aqueles que não o seguiam eram reprimidos.

Nesse ambiente, a matemática e a física teórica eram um oásis de liberdade. Embora os burocratas do Partido Comunista quisessem controlar cada aspecto da vida, essas áreas eram muito abstratas e de difícil entendimento para eles. Stalin, por exemplo, jamais se atreveu a fazer qualquer pronunciamento sobre a matemática. Ao mesmo tempo, os líderes soviéticos também perceberam a importância dessas áreas aparentemente obscuras e esotéricas para o desenvolvimento de armas nucleares; eis o motivo pelo qual eles não quiseram "mexer" nelas. Em consequência, os matemáticos e os físicos teóricos que trabalharam no projeto da bomba atômica (muitos deles de modo relutante, devo acrescentar) eram tolerados, e alguns eram até bem tratados pelo Big Brother.

Assim, por um lado, a matemática era abstrata e barata, e, por outro, era útil nas áreas em que os líderes soviéticos se preocupavam muito; sobretudo, defesa, o que assegurava a sobrevivência do regime. É por isso que os matemáticos podiam realizar suas pesquisas e não ficavam sujeitos às restrições impostas aos outros ramos (a menos que tentassem se intrometer em política, como a "Carta dos 99", que mencionei anteriormente).

Acredito que esse foi o principal motivo pelo qual tantos jovens estudantes de talento escolheram a matemática como profissão. Era uma área na qual podiam se envolver numa atividade intelectual livre.

Não obstante minha paixão e alegria de praticar a matemática, eu precisava de um emprego. Por causa disso, em paralelo com meu principal trabalho de pesquisa em matemática, que realizava em segredo com Borya, tinha de fazer alguma pesquisa "oficial" em Kerosinka.

Meu orientador era Yakov Isaevich Khurgin, professor do Departamento de Matemática Aplicada, e um dos membros mais carismáticos e reverenciados da faculdade. Ex-aluno de Gelfand, Yakov Isaevich, naquela altura, tinha quase 70 anos, mas era um dos professores mais "descolados" que tínhamos. Por causa de seu estilo envolvente de ensino e senso de humor, suas aulas tinham a maior frequência de alunos. Embora eu não comparecesse à maioria das aulas desde o terceiro ano, sempre tentei assistir às suas lições de teoria das probabilidades e estatística. Comecei a trabalhar com Yakov Isaevich no meu terceiro ano.

Ele era muito amável comigo. Verificava se eu era bem tratado e, quando eu precisava de ajuda, sempre estava presente. Por exemplo, quando tive alguns problemas em meu dormitório, ele usou sua influência para intervir. Yakov Isaevich era um homem inteligente, que aprendeu bem como "funciona o sistema": embora fosse judeu, ocupava uma posição prestigiosa em Kerosinka, como professor titular e chefe de um laboratório que trabalhava em áreas que abrangiam desde exploração de petróleo até medicina.

Yakov Isaevich também era um divulgador da matemática, tendo escrito diversos livros de sucesso para leigos. Em especial, eu gostava de um deles, intitulado So *What? (E daí?).* Trata de sua colaboração com cientistas, engenheiros e médicos. Por meio de diálogos com eles, Yakov Isaevich explica de maneira acessível e divertida conceitos matemáticos interessantes (a maioria relacionada à probabilidade e estatística, suas principais áreas de especialização) e suas aplicações. O título do livro tinha a intenção de retratar a noção de curiosidade pela qual um matemático aborda problemas da vida real. Esses livros e sua paixão por tornar as ideias da matemática acessíveis ao grande público me inspiraram muitíssimo.

Durante muitos anos, Yakov Isaevich trabalhou com médicos, sobretudo urologistas. A motivação original era pessoal. Ele estava matriculado no *Mekh-Mat* quando foi convocado para a linha de frente da Segunda Guerra Mundial, onde contraiu uma grave doença renal nas trincheiras geladas. Na realidade, ele teve sorte, pois foi levado ao hospital e foi salvo; a maioria dos seus colegas de classe, que também foram convocados pelo exército, morreu em combate. No entanto, daí em diante, ele teve de lidar com problemas renais. Na União Soviética, a medicina era gratuita, mas a qualidade dos serviços médicos era baixa. Para conseguir um bom tratamento, a pessoa tinha de ter uma ligação pessoal com um médico ou ter recursos para oferecer propina. Contudo, Yakov Isaevich tinha outra coisa a oferecer, que pouquíssimas pessoas tinham: sua expertise como matemático. Ele a utilizou para ser favorecido pelos melhores especialistas de urologia de Moscou.

Era uma grande coisa para ele, pois, sempre que seus rins apresentavam problemas, Yakov Isaevich conseguia tratamento com os principais urologistas no melhor hospital de Moscou. E isso também era importante para os médicos, pois Yakov Isaevich os ajudava a analisar seus dados, que muitas vezes revelavam fenômenos interessantes e previamente desconhecidos. Yakov Isaevich costumava dizer que o pensamento dos médicos estava bem adaptado para a análise de pacientes específicos e a tomada de decisões em cada caso específico. No entanto, isso às vezes também dificultava o foco na visão geral e a tentativa de encontrar padrões e princípios gerais. É aí que os matemáticos se tornavam úteis, pois nosso pensamento é completamente distinto: somos educados para procurar e analisar tipos de padrões gerais. Os médicos amigos de Yakov Isaevich apreciavam isso.

Quando me tornei seu aluno, Yakov Isaevich me inscreveu em seus projetos médicos. No fim das contas, nos cerca de dois anos e meio que trabalhei com Yakov Isaevich, desenvolvemos três projetos em urologia. Os resultados foram utilizados por três jovens urologistas em suas teses de doutorado (na Rússia, em medicina, havia um título adicional depois do de doutor, que requeria a elaboração de uma tese contendo pesquisa médica original). Tornei-me coautor de publicações em revistas médicas e até fui coautor de uma patente.

Lembro-me bem do início do primeiro projeto. Yakov Isaevich e eu fomos visitar Alexei Velikanov, jovem urologista, filho de um dos médicos mais importantes de Moscou. Yakov Isaevich era amigo de longa data (e paciente) do pai de Alexei, que pediu para ele ajudar seu filho. Alexei nos mostrou uma grande folha de papel, com diversos dados coletados de cerca de cem pacientes que tinham passado pela remoção de adenoma da próstata (um tumor benigno da próstata, frequentemente encontrado em homens mais velhos). Os dados incluíam diversas características, como pressão arterial e outros resultados do exame, pré e pós-cirurgia. Ele estava esperando usar aqueles dados para sugerir algumas conclusões sobre quando a cirurgia tinha mais probabilidade de ser bemsucedida, permitindo-lhe, assim, fazer um conjunto de recomendações sobre quando remover o tumor.

Alexei precisava de ajuda para analisar os dados e esperava que pudéssemos ajudá-lo. Como aprendi tempos depois, era uma situação típica. Frequentemente, médicos, engenheiros e outros esperavam que os matemáticos tivessem alguma varinha de condão que lhes permitisse tirar conclusões rapidamente de quaisquer dados coletados por eles. Claro que é um pensamento ilusório. Conhecemos alguns métodos eficientes de análise estatística, mas, com muita frequência, esses métodos não podem ser aplicados porque os dados não são precisos ou porque são tipos diferentes de dados: alguns são objetivos; outros são subjetivos (descrevem como os pacientes "se sentem", por exemplo); ou quantitativos, como pressão arterial e frequência cardíaca; ou qualitativos, como respostas "sim" ou "não" para algumas perguntas específicas. É muito difícil, ou mesmo impossível, utilizar esses dados não homogêneos numa fórmula estatística.

Por outro lado, às vezes formular as perguntas corretas permite que entendamos que alguns dados são irrelevantes e devem ser simplesmente descartados. Minha experiência é que somente cerca de 10% a 15% das informações coletadas pelos médicos foram utilizadas no momento do diagnóstico ou das recomendações de tratamento. No entanto, se você conversasse com eles, jamais diriam isso diretamente. Insistiriam que todas as informações são úteis e tentariam propor um quadro ou outro, em que levariam em conta essas informações. Levaria um tempo para convencê-los de que, na realidade, em todos aqueles casos, eles ignoraram a maioria dos dados e tomaram a decisão com base em poucos critérios essenciais.

Claro que, às vezes, existiam perguntas que podiam ser respondidas simplesmente introduzindo os dados em algum programa de análise estatística. No entanto, ao longo do trabalho nesses projetos, passei gradualmente a entender que nós, matemáticos, somos mais úteis para os médicos não tanto por causa de nosso conhecimento desses programas de análise estatística (afinal, isso não é muito difícil, e qualquer pessoa pode aprender), mas sim por causa de nossa capacidade de formular as perguntas certas e, em seguida, empreender uma análise fria e isenta para obter as respostas. Realmente, é essa "mentalidade matemática" que parece ser mais útil para aqueles que não são educados a pensar como matemáticos.

Em meu primeiro projeto, essa abordagem nos ajudou a eliminar os dados irrelevantes e, depois, descobrir algumas ligações ou correlações não triviais entre os parâmetros restantes. Isso não foi fácil e nos tomou alguns meses, mas ficamos felizes com os resultados. Escrevemos um artigo conjunto sobre nossas conclusões, e Alexei o utilizou em sua tese de doutorado. Yakov Isaevich e eu fomos convidados para a defesa de tese, juntamente com outro estudante de Kerosinka, Alexander Lofshitz, meu bom amigo, que também trabalhou naquele projeto.

Lembro-me de quando, na defesa de tese, um dos médicos perguntou o nome do programa de computador utilizado para obter aqueles resultados, e Yakov Isaevich respondeu que o nome era "Edward e Alexander". Era verdade: não utilizamos computador; em vez disso, fizemos todos os cálculos à mão ou com uma calculadora simples. O ponto principal não foi o cálculo (aquela foi a parte fácil), mas sim a formulação das perguntas corretas. Um eminente cirurgião, presente na defesa, fez então um comentário sobre como era muito impressionante que os matemáticos se revelassem tão úteis na medicina, e que talvez se tornassem ainda mais úteis nos anos vindouros. Nosso trabalho foi bem recebido pela comunidade médica, e Yakov Isaevich ficou satisfeito.

Pouco depois, Yakov Isaevich me pediu para trabalhar em outro projeto de urologia, que tinha a ver com tumores nos rins (para outra tese de doutorado), que eu também fui capaz de executar com sucesso.

O terceiro e último projeto médico em que trabalhei foi o mais interessante para mim. O jovem médico Sergei Arutyunyan – que também precisava de ajuda para analisar seus dados para uma tese – e eu desenvolvemos grande afinidade. Ele estava trabalhando com pacientes cujos sistemas imunológicos estavam rejeitando os rins transplantados. Nessa situação, o médico tem de tomar uma decisão muito rápida quanto a manter ou remover o rim, com consequências de longo alcance: se ele mantiver o rim, o paciente poderá morrer; mas, se removê-lo, o paciente precisará de outro, que pode ser difícil de encontrar.

Sergei queria achar uma maneira de distinguir que recomendações eram mais viáveis estatisticamente, com base em diagnósticos de ultrassom quantitativos. Ele tinha muita experiência nessa área e coletou muitos dados. Esperava que eu pudesse ajudá-lo a analisá-los e propor critérios objetivos significativos para tomada de decisão, que podiam ser úteis para outros médicos. Revelou-me que ninguém ainda fora capaz de fazer isso; a maioria dos médicos considerava impossível e preferia recorrer às suas próprias abordagens para esses casos.

Observei os dados. Como em nossos projetos prévios, existiam cerca de quarenta parâmetros distintos medidos para cada paciente. Em nossos encontros regulares, fazia perguntas incisivas para Sergei, tentando descobrir quais dados eram relevantes e quais não eram. Mas foi difícil. Como os outros médicos, ele dava suas respostas com base em casos específicos, o que não foi muito proveitoso.

Decidi utilizar outra abordagem. Pensei: "Sergei toma esses tipos de decisões todos os dias e, sem dúvida, é muito bom nisso. E se eu conseguisse aprender a 'ser ele'? Mesmo se eu não soubesse muito a respeito dos aspectos médicos do problema, poderia tentar aprender sua metodologia acompanhando o processo de tomada de decisão dele e, então, utilizar esse conhecimento para sugerir um conjunto de regras."

Propus que disputássemos uma espécie de jogo.[2] Sergei coletara dados de cerca de 270 pacientes. Ao acaso, escolhi os de trinta, e pus de lado os restantes. Consideraria o histórico de cada um desses pacientes escolhidos ao acaso e pediria que Sergei, que estava sentado no canto oposto da sala, fizesse perguntas para mim acerca do paciente, que eu responderia consultando o prontuário. Meu objetivo com tudo isso era procurar entender o padrão de suas perguntas (mesmo talvez não conseguindo entender o significado daquelas perguntas tão bem quanto ele). Por exemplo, às vezes ele fazia perguntas diferentes ou iguais, mas em sequência distinta. Nesse caso, eu o interrompia:

– Da última vez, você não perguntou isso. Por que está perguntando isso agora?

E ele explicava:

– Porque, no último paciente, o volume do rim era assim, e isso descartou esse cenário. Mas, nesse paciente, o volume é assado, e, dessa maneira, esse cenário é bastante possível.

Eu anotava tudo isso e tentava incorporar essas informações o máximo possível. Mesmo tantos anos depois, posso visualizar bem: Sergei sentado numa cadeira, no canto da sua sala, absorvido em seus pensamentos, tragando um cigarro (ele era um fumante inveterado). Era fascinante para mim tentar desconstruir a maneira como ele pensava; era mais ou menos como tentar desfazer um quebra-cabeça para descobrir quais eram as peças essenciais.

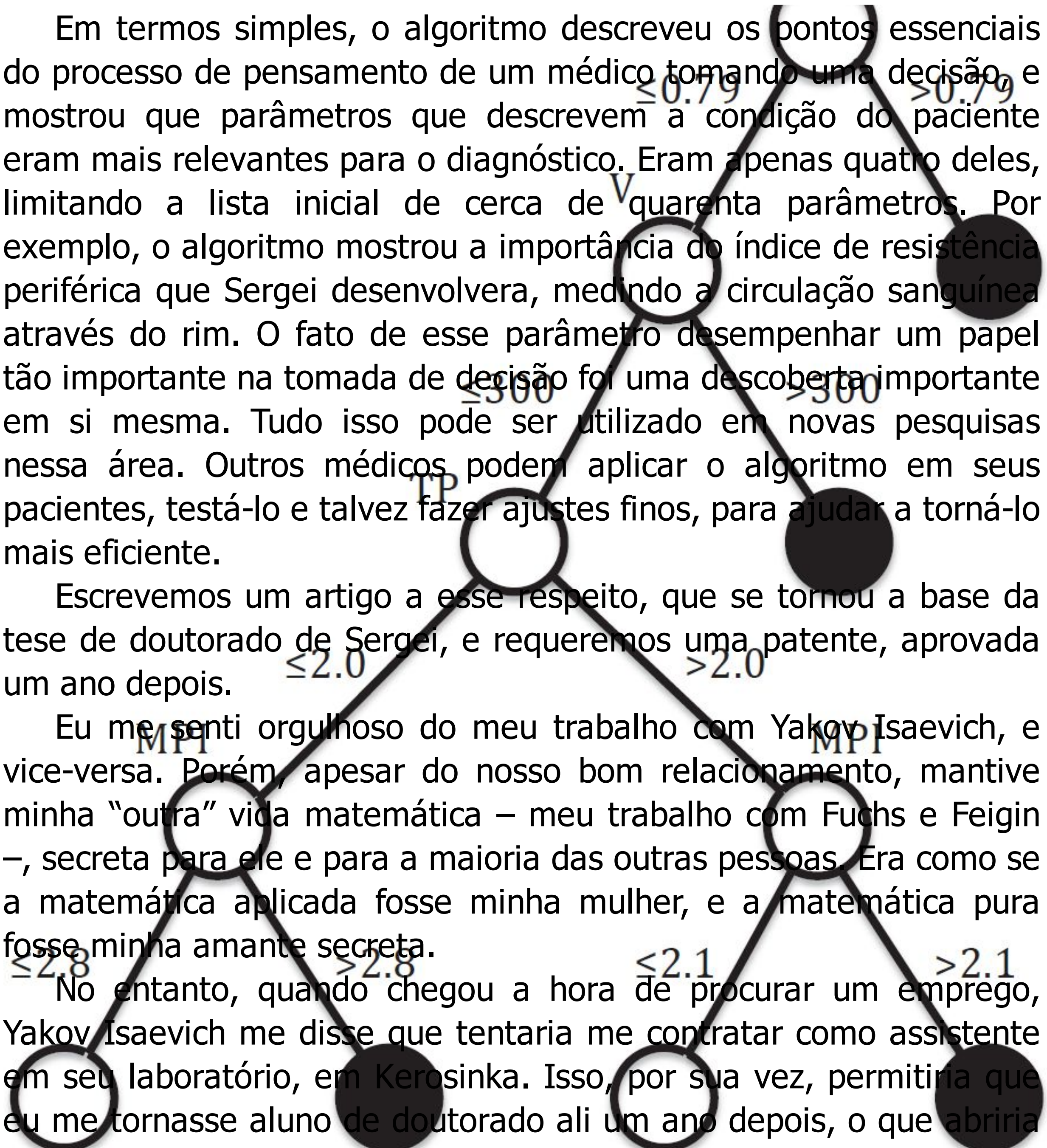
As respostas de Sergei me forneceram informações muito valiosas. Ele sempre chegava ao diagnóstico depois de não mais do que três ou quatro perguntas. Então, eu comparava aquele diagnóstico com o que realmente fora dado a cada paciente. Sergei nunca errava.

Depois de 24 casos, eu já conseguia dar o diagnóstico sozinho, seguindo o simples conjunto de regras que aprendi interrogando Sergei. Depois de outros seis casos, tornei-me praticamente tão bom quanto ele em prever o resultado. De fato, havia um simples algoritmo em jogo, que Sergei estava seguindo na maioria dos casos.

Claro que sempre havia alguns casos em que o algoritmo não era útil. No entanto, se alguém conseguisse dar o diagnóstico de maneira eficaz e rápida de 90% a 95% dos pacientes, já seria um feito e tanto. Sergei me disse que, na literatura existente a respeito do assunto de diagnósticos por ultrassom, não havia nada daquele tipo.

Depois de concluir nosso “jogo”, produzi um algoritmo explícito, que formulei como a árvore de decisão a seguir. De cada nó da árvore, saem duas pontas que alcançam outros nós; a resposta para uma pergunta específica no primeiro nó impõe para qual dos dois próximos nós possíveis o usuário deve se deslocar. Por exemplo, a primeira pergunta é sobre o índice de resistência periférica (RP) do vaso sanguíneo dentro do transplante. Esse foi um parâmetro que o próprio Sergei tinha proposto por meio de sua pesquisa. Se o valor fosse maior que 0,79, então era muito provável que o rim estivesse sendo rejeitado, e o paciente necessitava de uma cirurgia imediata. Nesse caso, nós nos deslocávamos para o nó preto da direita. Caso contrário, íamos para o nó da esquerda e fazíamos a seguinte pergunta: qual é o volume (V) do rim? E assim por diante. Portanto, os dados de cada paciente originam um caminho específico nessa árvore. A árvore termina depois de quatro passos ou menos (no momento, não é importante para nós o que eram os dois parâmetros restantes, TP e MPI). O nó terminal contém o veredicto, como exposto na figura: o nó preto significa “operar”, e o branco, “não operar”.

Por meio do algoritmo, processei os dados dos cerca de 240 pacientes restantes, cujos prontuários tinha posto de lado. A concordância foi notável. Em cerca de 95% dos casos, levou a um diagnóstico preciso.



Em termos simples, o algoritmo descreveu os pontos essenciais do processo de pensamento de um médico tomando uma decisão, e mostrou que parâmetros que descrevem a condição do paciente eram mais relevantes para o diagnóstico. Eram apenas quatro deles, limitando a lista inicial de cerca de quarenta parâmetros. Por exemplo, o algoritmo mostrou a importância do índice de resistência periférica que Sergei desenvolvera, medindo a circulação sanguínea através do rim. O fato de esse parâmetro desempenhar um papel tão importante na tomada de decisão foi uma descoberta importante em si mesma. Tudo isso pode ser utilizado em novas pesquisas nessa área. Outros médicos podem aplicar o algoritmo em seus pacientes, testá-lo e talvez fazer ajustes finos, para ajudar a torná-lo mais eficiente.

Escrevemos um artigo a esse respeito, que se tornou a base da tese de doutorado de Sergei, e requeremos uma patente, aprovada um ano depois.

Eu me senti orgulhoso do meu trabalho com Yakov Isaevich, e vice-versa. Porém, apesar do nosso bom relacionamento, mantive minha “outra” vida matemática – meu trabalho com Fuchs e Feigin –, secreta para ele e para a maioria das outras pessoas. Era como se a matemática aplicada fosse minha mulher, e a matemática pura fosse minha amante secreta.

No entanto, quando chegou a hora de procurar um emprego, Yakov Isaevich me disse que tentaria me contratar como assistente em seu laboratório, em Kerosinka. Isso, por sua vez, permitiria que eu me tornasse aluno de doutorado ali um ano depois, o que abriria um caminho para minha carreira no futuro próximo. Parecia um plano excelente, mas existiam muitos obstáculos. Entre eles, incluía-se o fato de que eu teria de enfrentar novamente o antissemitismo, como meu pai fora advertido quando foi até Kerosinka antes de eu me candidatar a uma vaga ali.

Claro que Yakov Isaevich estava bem ciente disso. Ele estava em Kerosinka havia décadas e sabia como tudo funcionava. Na realidade, fora contratado pelo próprio reitor Vinogradov, por quem tinha muita consideração.

As questões sobre minha nomeação seriam tratadas por burocratas de nível médio, e não por Vinogradov, e eles com certeza fechariam todas as portas para alguém cujo sobrenome parecesse judeu, mas Yakov Isaevich sabia como lidar com o sistema. No início do semestre da primavera do meu último ano em Kerosinka, quando a questão da minha contratação se tornou urgente, escreveu uma carta designando-me para seu laboratório. Ele a carregava em sua pasta, de modo que, se tivesse a oportunidade de falar com Vinogradov pessoalmente a meu respeito, estaria bem preparado.

A oportunidade logo se apresentou. Certo dia, ele deu de cara com Vinogradov no momento em que ele estava entrando em Kerosinka. Vinogradov ficou feliz de vê-lo e perguntou:

– Como vai você, Yakov Isaevich?

– Mal – Yakov Isaevich respondeu, de modo sério (ele conseguia ser um bom ator).

– O que houve?

– Fizemos coisas maravilhosas em laboratório no passado, mas não podemos mais fazer isso. Não consigo contratar novos talentos. Tenho um aluno excelente, que está se formando este ano, mas sou incapaz de contratá-lo.

Suponho que Vinogradov queria mostrar para Yakov Isaevich quem era o chefe, o que era o objetivo de Yakov Isaevich, e, assim, ele disse:

– Não se preocupe. Eu cuidarei disso.

Nesse momento, Yakov Isaevich tirou a carta de minha nomeação. Vinogradov não teve outra escolha a não ser assiná-la.

Normalmente, essa carta tinha de ser assinada por uma dezena de pessoas antes de chegar à mesa de Vinogradov: os chefes da Komsomol e do Partido Comunista locais, e todos os tipos de burocratas. Certamente, eles encontrariam uma maneira de procrastinar o processo, para que isso nunca acontecesse. No entanto, naquele momento, a carta já tinha a assinatura de Vinogradov! Então, o que eles poderiam fazer? Ele *era* o chefe, e eles não poderiam desobedecê-lo. Rangeriam os dentes e adiariam o processo por um tempo, mas no fim se dariam por vencidos e assinariam a carta. Gostaria de ter visto suas caras quando viram a assinatura de Vinogradov! De maneira brilhante, Yakov Isaevich tinha pregado uma peça no sistema.

Capítulo 13

O chamado de Harvard

Em março de 1989, no meio de todo esse estresse e incerteza, uma carta chegou dos Estados Unidos, num papel timbrado da Universidade de Harvard.

> Prezado doutor Frenkel,
>
> Por recomendação do Departamento de Matemática, gostaria de convidálo a visitar a Universidade de Harvard, no outono de 1989, como beneficiário da Harvard Prize Fellowship.
>
> Atenciosamente,
>
> Derek Bok
>
> Reitor da Universidade de Harvard

Já tinha ouvido falar da Universidade de Harvard, embora deva admitir que, na ocasião, não imaginava sua importância no mundo acadêmico. No entanto, fiquei muito contente. Ser convidado para ir aos Estados Unidos como beneficiário de uma bolsa de estudos parecia uma grande honra. O próprio reitor da universidade escreveu para mim! E ele me tratou como "doutor", embora eu ainda não tivesse recebido meu diploma de bacharel (na ocasião, eu estava no último semestre dos meus estudos em Kerosinka).

Como isso aconteceu? A fama do meu trabalho com Borya estava se espalhando. Nosso primeiro artigo curto já fora publicado, e estávamos terminando três outros artigos mais longos (todos em inglês). O físico Lars Brink, da Suécia, em visita a Moscou, pediu um deles para um livro que estava editando. Nós lhe entregamos nosso artigo e lhe pedimos para fazer cerca de vinte cópias e enviá-las para matemáticos e físicos do exterior que ele achasse que estariam interessados em nosso trabalho. Eu encontrara seus endereços em artigos que estavam disponíveis na Biblioteca de Ciências de Moscou e entreguei a lista para Lars. Gentilmente, ele concordou em nos ajudar, pois sabia como era difícil para nós o envio de cópias. Aquele artigo ficou bastante conhecido, em parte por causa de suas aplicações em física quântica.

Isso aconteceu muitos anos antes que o uso da Internet se tornasse comum, mas o sistema de disseminação de literatura científica era bastante eficiente: os autores difundiam originais datilografados dos seus artigos antes da publicação (eram chamados de preprints). Em seguida, os receptores os copiavam e os repassavam para seus colegas e também para as bibliotecas universitárias. As cerca de vinte pessoas para quem Lars Brink enviou nosso artigo devem ter feito a mesma coisa.

Enquanto isso, mudanças enormes estavam acontecendo na União Soviética: era a época da *perestroika,* desencadeada por Mikhail Gorbachev. Um dos resultados foi que as pessoas tinham permissão para viajar ao exterior com maior liberdade. Antes dessa época, matemáticos como Feigin e Fuchs receberam muitos convites para participar de conferências e visitar universidades do Ocidente, mas as viagens internacionais eram rigorosamente controladas pelo governo. Antes de obter o visto de entrada usual para outro país, a pessoa tinha que conseguir um visto de saída, permitindo que ela saísse da União Soviética. Pouquíssimos desses vistos eram concedidos, como resultado do medo de que as pessoas não voltassem (e, de fato, muitas não retornavam). Quase todos os pedidos eram negados, e Fuchs certa vez me disse que havia anos que ele tentara obter um visto pela última vez.

No entanto, de repente, no outono de 1988, diversas pessoas tiveram permissão para viajar ao exterior, entre elas, Gelfand. O jovem e talentoso matemático Sasha Beilinson, amigo de Borya, também viajou para os Estados Unidos, para visitar Joseph Bernstein, com quem escrevera um livro, e que emigrara alguns anos antes e era professor em Harvard.

Enquanto isso, no Ocidente, alguns cientistas também reconheceram que as mudanças estavam chegando e tentaram usar essa oportunidade para convidar acadêmicos da União Soviética. Um deles era Arthur Jaffe, renomado físico e matemático, que era, na ocasião, o chefe do Departamento de Matemática de Harvard. Ele decidiu criar um novo programa de professor visitante para jovens e talentosos matemáticos russos. Quando Gelfand, que possuía um diploma de doutor *honoris causa* de Harvard, fez uma visita no outono de 1988, Jaffe pediu sua ajuda para convencer o reitor Derek Bok, a quem Gelfand conhecia pessoalmente, a fornecer recursos e apoiar o programa (parte dos recursos também foi dada por Landon Clay, que, posteriormente, criou o Clay Mathematics Institute). Jaffe denominou esse programa de bolsas como Harvard Prize Fellowship.

Depois que o programa começou a funcionar, a questão era quem convidar, e Jaffe consultou diversos matemáticos para obter sugestões. Aparentemente, meu nome foi mencionado por muitas pessoas (incluindo Beilinson), e esse foi o motivo pelo qual fui um dos quatro primeiros matemáticos contemplados com a bolsa.

Depois da carta do reitor Bok, logo recebi uma carta mais longa do próprio Jaffe, que descreveu os termos da nomeação com mais detalhes. Eu poderia ficar em Harvard por um período de três a cinco meses; seria professor visitante, mas não teria obrigações formais, exceto dar palestras ocasionais sobre meu trabalho. Harvard pagaria a viagem, a hospedagem e as despesas com manutenção. Praticamente a única coisa que Harvard não estava fornecendo era um visto de saída soviético. Felizmente, e para minha grande surpresa, eu o obtive em um mês.

Em sua carta, Arthur Jaffe disse que eu poderia ir no fim de agosto e permanecer até o fim de janeiro, mas decidi ficar apenas três meses, que era o período mínimo de estadia especificado na carta. Por quê? Bem, eu não tinha a intenção de emigrar para os Estados Unidos e planejava voltar à União Soviética. Além disso, estava me sentindo culpado pelo fato de ter de pedir uma licença do trabalho em Kerosinka, que Yakov Isaevich conseguira para mim com tanto esforço.

Após obter meu visto de saída e ficar claro que minha viagem estava se tornando realidade, tinha de confessar tudo para Yakov Isaevich e lhe revelar minhas "atividades extracurriculares": meu trabalho matemático com Feigin e o convite de Harvard. Naturalmente, ele ficou muito surpreso. Yakov Isaevich tinha certeza de que eu estava dedicando toda a minha energia aos projetos médicos nos quais eu estava trabalhando com ele. Sua primeira reação foi bastante negativa.

–E quem vai trabalhar no meu laboratório se você for para Harvard? – ele perguntou.

Nesse momento, Tamara Alekseevna, mulher de Yakov Isaevich, que sempre me acolhia calorosamente na casa deles, veio me socorrer:

–Yasha, você está falando besteiras – ela disse. – O garoto foi convidado para Harvard. É uma grande notícia. Com certeza, ele deve ir, e, depois que voltar, vai continuar trabalhando com você.

Com relutância, Yakov Isaevich concordou.

Os meses de verão passaram rapidamente e a data de minha partida, 15 de setembro de 1989, chegou. Voei de Moscou para o aeroporto JKF, em Nova York, e, em seguida, para Boston. Jaffe não pôde me esperar no aeroporto pessoalmente, mas mandou um estudante de pós-graduação me buscar. Fui levado ao apartamento de dois quartos que o Departamento de Matemática alugou para mim e outro bolsista, Nicolai Reshetikhin, que chegaria alguns dias depois. Era no Botanic Gardens, um conjunto de prédios residenciais de propriedade de Harvard, a menos de dez minutos de caminhada de Harvard Yard. Tudo parecia diferente e estimulante.

Era tarde da noite quando cheguei ao meu apartamento. Atordoado com a mudança de fuso horário, adormeci imediatamente. Na manhã seguinte, fui até a quitanda mais próxima e comprei alguns produtos. De volta à casa, comecei a preparar uma salada e percebi que não tinha sal. Por isso, tive de comê-la sem sal.

Assim que terminei, a campainha tocou. Era Arthur Jaffe. Ele sugeriu que déssemos uma volta pela cidade em seu carro. Aquilo era realmente incrível – um rapaz de 21 anos sendo apresentado à cidade pelo chefe do Departamento de Matemática de Harvard. Vi o Harvard Yard, o Charles River, belas igrejas e os arranha-céus no centro de Boston. O tempo estava lindo. Fiquei muito impressionado com a cidade.

No caminho de volta de nosso passeio de duas horas, disse para Arthur que precisava comprar sal, e ele afirmou:

– Sem problema. Vou levá-lo a um supermercado próximo.

Ele me levou ao Star Market, na Porter Square, e disse que me esperaria em seu carro.

Era a primeira vez na vida que eu entrava num supermercado, e foi uma experiência surpreendente. Naquela época, na Rússia, havia escassez de alimentos. Em minha cidade natal, Kolomna, podíamos comprar apenas pão, leite e vegetais básicos, como batatas. Para outros alimentos, tínhamos de viajar a Moscou, e mesmo ali o melhor que podíamos comprar era mortadela e queijo. Todos os finais de semana, quando voltava de Moscou para casa, levava alguns alimentos para os meus pais. Assim, no supermercado, ver corredor após corredor apinhado de todos os tipos de comida era absolutamente inacreditável.

"Como você encontra alguma coisa aquí?", pensei. Comecei a atravessar os corredores em busca de sal, mas não consegui encontrá-lo. Acho que devo ter ficado um pouco zonzo por causa da abundância de produtos; de qualquer modo, nem mesmo percebi as placas de sinalização. Perguntei a respeito da localização do sal para um funcionário do supermercado, mas não consegui entender uma palavra do que ele disse. Meu inglês era bom o suficiente para dar uma aula de matemática, mas não tinha nenhuma experiência com o inglês coloquial cotidiano. O sotaque pesado de Boston deixava as coisas ainda piores.

Depois de meia hora, eu estava ficando realmente desesperado, perdido no Star Market como num labirinto gigante. Finalmente, topei com um pacote de sal misturado com alho. "Muito bem, vamos sair daqui", disse para mim mesmo. Paguei e saí do supermercado. O pobre Arthur ficara preocupado – que diabos aquele garoto estava fazendo ali dentro há 45 minutos? – e, assim, já tinha começado a me procurar.

"Perdendo-me na abundância do capitalismo", pensei.

Minha adaptação aos Estados Unidos começara.

Os outros dois favorecidos com a bolsa Harvard Prize Fellowship que chegaram no semestre do outono foram Nicolai Reshetikhin, com quem eu estava dividindo o apartamento (ele chegou uma semana depois), e Boris Tsygan.* Os dois tinham dez anos a mais do que eu, e já haviam feito contribuições seminais para a matemática. Conhecia o trabalho deles, mas nunca tinha os encontrado pessoalmente. Naquele primeiro semestre, nós nos aproximamos e nos tornamos amigos pra vida toda.

Nicolai, ou Kolya, como ele é afetuosamente conhecido por muitos, era de São Petersburgo. Ele já era famoso como um dos inventores dos assim chamados grupos quânticos, que são generalizações dos grupos comuns. Mais precisamente, os grupos quânticos são determinadas deformações dos grupos de Lie, os objetos matemáticos de que falamos anteriormente. Atualmente, esses grupos quânticos são tão ubíquos quanto os grupos de Lie em diversas áreas da matemática e da física. Por exemplo, Kolya e outro matemático, Vladimir Turaev, utilizaram os grupos quânticos para construir constantes de nós e variedades tridimensionais.

Borya Tsygan era colaborador de longa data de Boris Feigin, meu professor. Natural de Kiev, na Ucrânia, Tsygan teve uma grande ideia pouco depois de sair da faculdade, que o levou a um grande avanço no campo da "geometria não comutativa". Como outros matemáticos judeus, ele foi impedido de ingressar na escola de pós-graduação depois da faculdade. Dessa maneira, após a formatura, precisou trabalhar numa fábrica de máquinas pesadas, em Kiev, passando todo o dia cercado por máquinas barulhentas. Não obstante, foi nessas condições insalubres que fez sua descoberta.

As pessoas tendem a pensar que os matemáticos sempre trabalham em condições assépticas, contemplando a tela de um computador ou um teto, num escritório impecável. No entanto, na realidade, algumas das melhores ideias chegam quando você menos espera, possivelmente no meio de um ruído industrial irritante.

Caminhando pelo Harvard Yard e observando a arquitetura histórica dos edifícios de tijolos, a estátua de Harvard e as torres das antigas igrejas, não pude deixar de sentir a exclusividade daquele lugar, com sua longa tradição de busca do conhecimento e fascinação infinita com a descoberta.

O Departamento de Matemática de Harvard ficava no Science Center, edifício de aparência moderna pouco além dos limites do Harvard Yard. O Science Center parecia uma gigantesca espaçonave alienígena, que, por acaso, houvesse pousado em Cambridge, em Massachusetts, e decidido permanecer ali. O Departamento de Matemática ocupava três andares do edifício. No interior, escritórios se misturavam com áreas comuns equipadas com máquinas de café e sofás confortáveis. Havia também uma biblioteca de matemática bem projetada e até uma mesa de pingue-pongue. Tudo isso criava uma atmosfera acolhedora, e, mesmo no meio da noite, você podia encontrar muitas pessoas por ali, jovens e adultos, trabalhando, lendo na biblioteca, atravessando rapidamente os corredores, envolvidos numa conversa animada, ou simplesmente cochilando nos sofás… Você tinha a sensação de que jamais teria de deixar aquele lugar (e parecia que algumas pessoas jamais o deixavam).

O departamento era bem pequeno em comparação com as outras escolas: a faculdade não tinha mais do que quinze professores permanentes e cerca de dez acadêmicos com doutorado que ocupavam cargos de ensino de três anos. Quando cheguei, a faculdade abrigava alguns dos maiores matemáticos de nosso tempo, como Joseph Bernstein, Raoul Bott, Dick Gross, Heisuke Hironaka, David Kazhdan, Barry Mazur, John Tate e Shing-Tung Yau. Conhecê-los e aprender com eles foi uma oportunidade única. Tenho lembranças afetuosas do carismático Raoul Bott, gigante amável de cabelos grisalhos, então perto dos 70 anos, detendo-me no corredor e perguntando, com sua voz retumbante: "Como vai, jovem?"

Também havia cerca de trinta estudantes de pós-graduação, que tinham cubículos muito pequenos no andar intermediário.

Os três russos – Kolya, Borya e eu – fomos acolhidos calorosamente por todos. Embora estivéssemos no início da grande onda de cientistas russos que invadiram as universidades norte-americanas nos anos seguintes, ainda era bastante incomum ter visitantes da União Soviética naquele tempo. No entanto, após cerca de uma semana em Cambridge, senti-me bastante integrado. Tudo parecia muito natural e excelente. Comprei um jeans descolado e um *walkman* da Sony (lembre-se, era 1989!), e passeava pela cidade usando fones de ouvido, escutando as músicas mais incríveis. Para um estranho, teria parecido um típico estudante de 21 anos. Meu inglês coloquial ainda deixava algo a desejar. Para melhorá-lo, todos os dias comprava o *The New York Times* e o lia, com um dicionário, por, no mínimo, uma hora (decifrando algumas das palavras em inglês mais enigmáticas que alguém pode encontrar, como percebi posteriormente). Também me viciei em programas de TV da madrugada.

O programa de David Letterman (que, na época, começava à 00h35, na NBC) era o meu favorito. Quando assisti pela primeira vez, não consegui entender uma palavra. No entanto, de algum modo ficou claro que aquele era o *meu* programa, que eu realmente o apreciaria, se ao menos conseguisse entender o que o anfitrião estava dizendo. Assim, isso proporcionou certa motivação extra para mim. Obstinadamente, assistia ao programa todas as noites e, aos poucos, comecei a entender as piadas, o contexto, o pano de fundo. Foi o meu jeito de descobrir a cultura pop norte-americana, e eu estava devorando cada pedaço dela. Certas noites, quando tinha de ir dormir cedo, gravava o programa e assistia durante o café da manhã. O programa de Letterman tornou-se uma espécie de ritual religioso para mim.

Embora os outros colegas e eu não tivéssemos obrigações formais, aparecíamos no departamento todos os dias para trabalhar em nossos projetos, para conversar com as pessoas e para acompanhar os seminários, que eram muitos. Os dois professores com quem eu mais conversava eram dois russos expatriados: Joseph Bernstein e David Kazhdan. Ambos eram matemáticos incríveis, ex-alunos de Gelfand, e amigos íntimos, mas era impossível imaginar temperamentos mais distintos.

Joseph é quieto e despretensioso. Se fosse formulada uma pergunta, ele a escutaria em silêncio, pensaria nela durante algum tempo e muitas vezes afirmaria que não sabia a resposta, mas ainda diria o que pensava a respeito do assunto. Suas explicações eram práticas e cristalinas, e, frequentemente, ele, de fato, explicaria a resposta que dizia não saber. Joseph sempre fazia você sentir que não tinha de ser um gênio para entender toda aquela coisa; uma sensação incrível para um matemático jovem e ambicioso.

David, por outro lado, é um dínamo – extremamente vivo, espirituoso e rápido. Em seu conhecimento enciclopédico, petulância e exibição ocasional de impaciência, ele lembra o professor Gelfand. Nos seminários, se ele achasse que o palestrante não estava explicando bem o material, simplesmente se aproximaria do quadro-negro, arrancaria o giz da mão do palestrante e assumiria o comando – isto é, se estivesse interessado no assunto. Caso contrário, ele podia simplesmente tirar uma soneca. Era muito raro escutá-lo dizer "não sei" em resposta a uma pergunta – realmente, ele sabia quase tudo. Ao longo dos anos, passei muitas horas conversando com ele e aprendi muita coisa. Tempos depois, trabalhamos num projeto conjunto, o que foi uma experiência gratificante.

Em Harvard, durante minha segunda semana, tive outro encontro decisivo. Há outra escola em Cambridge, menos conhecida, geralmente referida por uma abreviatura do seu nome: MIT (estou brincando, é claro!). Sempre houve um pouco de rivalidade entre Harvard e o MIT, mas, na realidade, os dois departamentos de matemática estão intimamente associados. Não é incomum, por exemplo, um aluno de Harvard ter um professor do MIT como orientador, e vice-versa. Frequentemente, os alunos de uma escola acompanham aulas oferecidas pela outra.

Sasha Beilinson, amigo de Borya Feigin, foi nomeado para um cargo de professor no MIT, e eu estava acompanhando as aulas que ele dava ali. Na primeira aula, alguém indicou para mim um homem bem-apessoado, com cerca de 45 anos, sentado a duas filas de distância.

– Aquele ali é Victor Kac.

Uau! Ele era o criador das álgebras de Kac–Moody e de muitas outras coisas. Eu estivera estudando seus trabalhos durante anos.

Depois da aula, fomos apresentados. Victor me cumprimentou efusivamente e disse que queria aprender mais a respeito do meu trabalho. Fiquei emocionado quando ele me convidou para falar em seu seminário semanal. Acabei dando três palestras, em três sextas-feiras consecutivas. Foram minhas primeiras palestras em inglês, e acho que fiz um trabalho decente: o público era grande, pareceu interessado e fez muitas perguntas.

Victor me apadrinhou. Nós nos encontrávamos com frequência em sua espaçosa sala no MIT, conversávamos sobre matemática, e ele muitas vezes me convidava para jantar em sua casa. Posteriormente, trabalhamos juntos em diversos projetos.

Cerca de um mês após minha chegada, Borya Feigin também veio para Cambridge. Sasha Beilinson enviou-lhe um convite para visitar o MIT por dois meses. Senti-me feliz com a vinda de Borya para Cambridge: ele era meu professor, e nós éramos muito próximos. Também tínhamos diversos projetos em andamento, e aquela era uma grande oportunidade de trabalhar neles. Inicialmente, não imaginei que sua visita também provocaria um grande tumulto em minha vida.

A notícia de que as portas para o Ocidente estavam abertas, e que os matemáticos podiam viajar livremente e visitar universidades nos Estados Unidos e em outros países, rapidamente se espalhou pela comunidade matemática moscovita. Muitas pessoas decidiram aproveitar a oportunidade e se mudar em definitivo para os Estados Unidos. Alguns começaram a enviar currículos para diversas universidades e ligar para os seus colegas nos Estados Unidos, dizendo-lhes que estavam procurando empregos. Como ninguém sabia por quanto tempo essa política de “abertura” continuaria (a maioria das pessoas tinha a expectativa de que, após alguns meses, as fronteiras seriam fechadas de novo), isso criou uma espécie de frenesi em Moscou; todas as conversas terminavam com a mesma pergunta: “Não é melhor cair fora?”

E como podia ser de outra maneira? A maioria dessas pessoas tinha de lidar com o antissemitismo e diversos outros obstáculos na União Soviética. Não conseguiam achar emprego na academia e tinham de trabalhar com matemática como ocupação secundária. Além disso, embora a comunidade matemática soviética fosse muito forte, estava bastante isolada do resto do mundo. Havia grandes oportunidades de desenvolvimento profissional no Ocidente que simplesmente não existiam na União Soviética. Quando as oportunidades de uma vida melhor no exterior se apresentaram a essas pessoas, como alguém podia esperar que elas fossem leais ao país que as rejeitara e que tentava impedi-las de trabalhar no ramo que amavam?

Quando chegou aos Estados Unidos, Borya Feigin percebeu imediatamente que uma grande fuga de cérebros da Rússia estava prestes a acontecer e nada poderia detê-la. Na Rússia, a economia estava se desintegrando, com escassez de alimentos por toda parte, e a situação política estava ficando cada vez mais instável. Nos Estados Unidos, havia um padrão de vida muito superior, uma abundância de tudo, e a vida dos acadêmicos parecia muito confortável. O contraste era imenso. Como era possível convencer uma pessoa a voltar para a União Soviética depois de ela vivenciar tudo aquilo pessoalmente? O êxodo da maioria esmagadora dos matemáticos de primeira linha da Rússia – ou de qualquer pessoa, na realidade, que conseguisse arrumar um emprego – parecia inevitável, e não demoraria a acontecer.

Não obstante, Borya decidiu voltar para Moscou, apesar do fato de que ele enfrentara o antissemitismo durante toda sua vida e não tinha ilusões a respeito da situação da União Soviética. Ele foi aceito na Universidade de Moscou como aluno de graduação (em 1969, quando se candidatou, alguns estudantes judeus ainda eram aceitos), mas não teve permissão para ingressar no curso de doutorado. Borya teve de se matricular numa universidade na cidade provinciana de Yaroslavl para obter seu diploma. Em seguida, enfrentou muita dificuldade para encontrar um emprego, até que conseguiu um cargo no Instituto de Física do Estado Sólido. No entanto, Borya achava perturbadora essa corrida para sair da União Soviética. Ele considerava moralmente errado deixar o país em massa dessa maneira, num momento de grande reviravolta, como ratos abandonando um navio que está afundando.

Borya sentia muita tristeza com o fato de que, em pouco tempo, a grande escola matemática de Moscou deixaria de existir. A comunidade coesa de matemáticos, na qual ele vivia havia muitos anos, estava prestes a se evaporar diante de seus próprios olhos. Borya sabia que, em breve, ficaria praticamente sozinho em Moscou, privado do maior prazer de sua vida: trabalhar na matemática junto com seus amigos e colegas.

Claro que esse se tornou o tema principal de minhas conversas com Borya. Ele tentava me convencer a voltar e a não sucumbir àquilo que ele considerava ser uma histeria coletiva, dominando aqueles que estavam tentando escapar para o Ocidente. Borya também estava preocupado com o fato de que eu não seria capaz de me tornar um bom matemático nos Estados Unidos. A "sociedade de consumo" norte-americana, ele achava, pode liquidar a motivação e a ética de trabalho de uma pessoa.

– Veja, você tem talento, mas ele precisa ser desenvolvido – Borya me disse. – Você tem de trabalhar duro, da mesma forma que estava trabalhando em Moscou. Só assim você pode alcançar seu potencial. Aqui, nos Estados Unidos, isso é impossível. Há muitas distrações e tentações. A vida aqui é uma questão de diversão, prazer e gratificação imediata. Como você pode se concentrar em seu trabalho?

Eu não estava concordando com a argumentação de Borya, ao menos não inteiramente. Sabia que eu tinha uma motivação forte em relação à matemática. Mas tinha apenas 21 anos, e Borya, quinze anos mais velho, era meu mentor. Devia-lhe tudo que alcançara como matemático. Suas palavras me deram o que pensar; e se ele tivesse razão?

O convite para Harvard foi um divisor de águas em minha vida. Apenas cinco anos antes, fora reprovado no exame para a MGU, e parecia que meu sonho de me tornar um matemático tinha acabado de forma irreparável. A chegada em Harvard foi minha vindicação, uma recompensa por todo o trabalho duro que fiz em Moscou naqueles cinco anos. No entanto, eu queria me manter em movimento, realizando novas descobertas. Queria me tornar o melhor matemático possível. Considerei o convite para Harvard como apenas uma etapa de uma longa jornada. Era um avanço. Arthur Jaffe e outros acreditaram em mim e me deram aquela oportunidade. Não podia desapontá-los.

Em Cambridge, tive a sorte de ter o apoio de matemáticos maravilhosos, como Victor Kac, que me estimularam e me ajudaram de todas as maneiras possíveis. No entanto, também senti a inveja de alguns dos meus colegas: por que esse rapaz estava recebendo tanto tão cedo? O que ele fez para merecer isso? Senti-me forçado a corresponder às expectativas, para provar a todos que meus primeiros trabalhos matemáticos não eram um acaso feliz, que eu podia fazer coisas melhores e maiores em matemática.

Os matemáticos formam uma comunidade pequena e, como todos os seres humanos, fofocam a respeito de quem vale o quê. Em meu pouco tempo de Harvard, já tinha ouvido muitas histórias de prodígios que se apagaram cedo. Tinha ouvido alguns comentários implacáveis a respeito deles, coisas como "Lembra-se de fulano? Seus primeiros trabalhos eram tão bons. Mas ele não fez nada nem de perto tão importante nos últimos três anos. Que vergonha!".

Estava aterrorizado que, em três anos, dissessem isso a meu respeito; assim, constantemente me sentia sob pressão para produzir e ter êxito.

Enquanto isso, na União Soviética, a situação econômica estava se deteriorando rapidamente, e a perspectiva era muito incerta. Observando tudo isso de dentro, e convencidos de que eu não tinha futuro na União Soviética, meus pais me ligavam com regularidade insistindo para que eu não voltasse. Naquele tempo, era muito difícil (e caro) ligar da União Soviética para os Estados Unidos. Eles tinham receio de que seu telefone residencial estivesse grampeado e, dessa maneira, viajavam para Moscou, dirigiam-se ao correio central e ligavam dali. Essa viagem durava quase um dia inteiro. No entanto, estavam decididos, ainda que sentissem muito a minha falta, a fazer tudo ao alcance deles para me convencer a ficar nos Estados Unidos. Eles tinham absoluta certeza de que aquilo era o melhor para mim.

Borya também queria o melhor para mim, mas sua postura tinha, em parte, uma base moral. Ele estava indo contra a corrente, e eu o admirei por isso. No entanto, eu também tinha de reconhecer que ele podia se dar ao luxo de fazer isso por causa da sua situação relativamente confortável em Moscou (embora isso fosse logo mudar, pois ele seria forçado a passar alguns meses do ano no exterior – principalmente, no Japão – para sustentar sua família). Minha situação era totalmente diferente: não tinha lugar para ficar em Moscou, e só possuía um *propiska* temporário, ou seja, o direito de viver ali. Embora Yakov Isaevich tivesse me assegurado um emprego temporário como assistente em Kerosinka, a vaga proporcionava apenas um salário de fome, que mal dava para alugar um quarto em Moscou. Por causa do antissemitismo, conseguir se matricular numa escola de pós-graduação seria uma batalha difícil, e minhas perspectivas futuras de emprego pareciam ainda mais desalentadoras.

No fim de novembro, Arthur Jaffe me chamou em seu escritório e ofereceu estender minha permanência em Harvard até o fim de maio. Eu tinha de tomar uma decisão rapidamente, mas estava dividido. Gostava do meu estilo de vida em Boston. Sentia que era meu lugar. Com Harvard e o MIT, Cambridge era um dos principais centros de matemática do mundo. Alguns dos matemáticos mais brilhantes estavam ali, e eu podia simplesmente bater em suas portas, fazer-lhes perguntas, aprender com eles. Havia também inúmeros seminários, onde quase todas as descobertas estimulantes eram relatadas logo após terem sido feitas. Estava cercado pelos estudantes mais brilhantes. Era o ambiente mais estimulante para um jovem com pretensões a matemático que se podia imaginar. Moscou costumava ser tal lugar, mas não era mais.

No entanto, aquela era a primeira vez que ficava longe de casa por tanto tempo. Sentia falta da minha família e dos meus amigos. E Borya, meu professor, que era a pessoa mais próxima de mim em Cambridge, estava inflexível quanto à opinião de que eu deveria voltar em dezembro, como planejado.

Todas as manhãs acordava apavorado, pensando: “O que devo fazer?” Em retrospecto, a decisão parece óbvia. No entanto, com tantas forças diferentes colidindo, todas ao mesmo tempo, a decisão não era nada fácil. Finalmente, após algumas deliberações angustiadas, decidi seguir o conselho dos meus pais e permanecer. Contei para Jaffe. Meus amigos Reshetikhin e Tsygan tomaram a mesma decisão.

Borya ficou triste com isso, e senti que o tinha desapontado. Foi um momento de tristeza e muita incerteza quando me despedi dele no Aeroporto Logan, antes de sua partida para Moscou, em meados de dezembro. Não sabíamos o que o futuro reservava para nenhum de nós dois; nem mesmo se seríamos capazes de nos encontrar de novo num futuro próximo. Eu ignorara o conselho de Borya. No entanto, ainda tinha medo de que talvez vivenciasse os receios dele.

*Vera Serganova, a quarta beneficiária da bolsa, veio na primavera.

Capítulo 14

Amarrando os feixes da sabedoria

O semestre da primavera trouxe mais visitantes a Harvard; um deles, Vladimir Drinfeld, mudou o rumo da minha pesquisa e, em vários aspectos, minha carreira matemática. E tudo aconteceu por causa do Programa de Langlands.

Tinha ouvido falar de Drinfeld antes. Na época, ele tinha apenas 36 anos, mas já era uma lenda. Seis meses antes de nos conhecermos, fora agraciado com a medalha Fields, um dos prêmios de maior prestígio na matemática, considerado por muitos o equivalente ao Prêmio Nobel.

Drinfeld publicou seu primeiro artigo em matemática com 17 anos e, aos 20, já estava abrindo novas perspectivas em relação ao Programa de Langlands. Natural de Carcóvia, na Ucrânia, onde seu pai era um conhecido professor de matemática, Drinfeld estudou na Universidade de Moscou, no início da década de 1970 (na época, os judeus também enfrentavam dificuldade para ingressar na MGU, mas uma determinada porcentagem de estudantes judeus era admitida). Quando se formou na MGU, já era renomado mundialmente por seu trabalho, e foi aceito na escola de pós-graduação, o que era extraordinário para um estudante judeu. Seu orientador era Yuri Ivanovich Manin, um dos matemáticos mais originais e influentes do mundo.

Todavia, mesmo Drinfeld não foi capaz de escapar inteiramente do antissemitismo. Após obter seu diploma de doutorado, foi incapaz de conseguir um emprego em Moscou e precisou passar três anos numa universidade provincial, em Ufa, cidade industrial nos Montes Urais. Drinfeld relutou em ir para Ufa, sobretudo porque não existiam matemáticos ali trabalhando nas áreas que lhe interessavam. No entanto, em consequência de sua estadia em Ufa, Drinfeld desenvolveu um trabalho importante com a teoria de sistemas integráveis, um assunto que estava bem longe de seus interesses, juntamente com Vladimir Sokolov, matemático local. Atualmente, os sistemas integráveis que eles criaram são conhecidos como sistemas de Drinfeld–Sokolov.

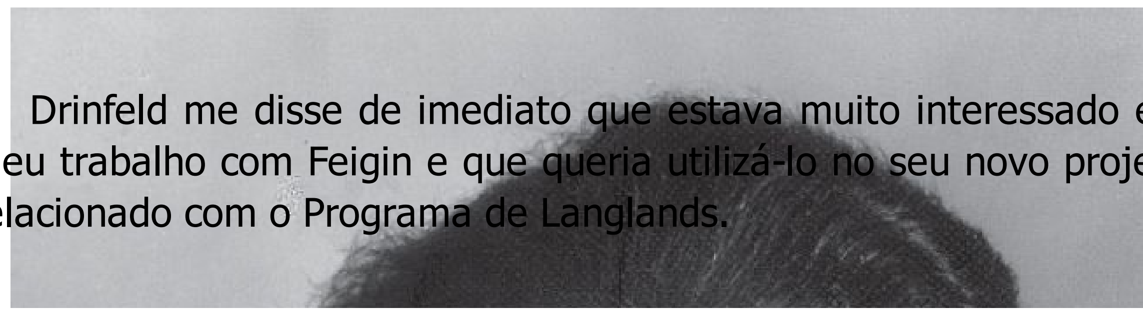
Depois de três anos em Ufa, Drinfeld, finalmente, foi capaz de conseguir um emprego em sua cidade natal, no Instituto de Física de Baixa Temperatura, em Carcóvia. Era um emprego relativamente confortável, e ele pôde ficar perto de sua família. No entanto, em Carcóvia, Drinfeld ficou isolado da comunidade matemática soviética, que se concentrava em Moscou e, em menor grau, em São Petersburgo.

Apesar de tudo isso, trabalhando basicamente sozinho, Drinfeld continuou produzindo trabalhos maravilhosos, em diversas áreas da matemática e da física. Além de demonstrar conjecturas importantes dentro do Programa de Langlands e abrir um novo capítulo na teoria dos sistemas integráveis com Sokolov, ele também desenvolveu a teoria geral dos grupos quânticos (originalmente descoberta por Kolya Reshetikhin e seus coautores) e muitas outras coisas. A amplitude de suas contribuições era surpreendente.

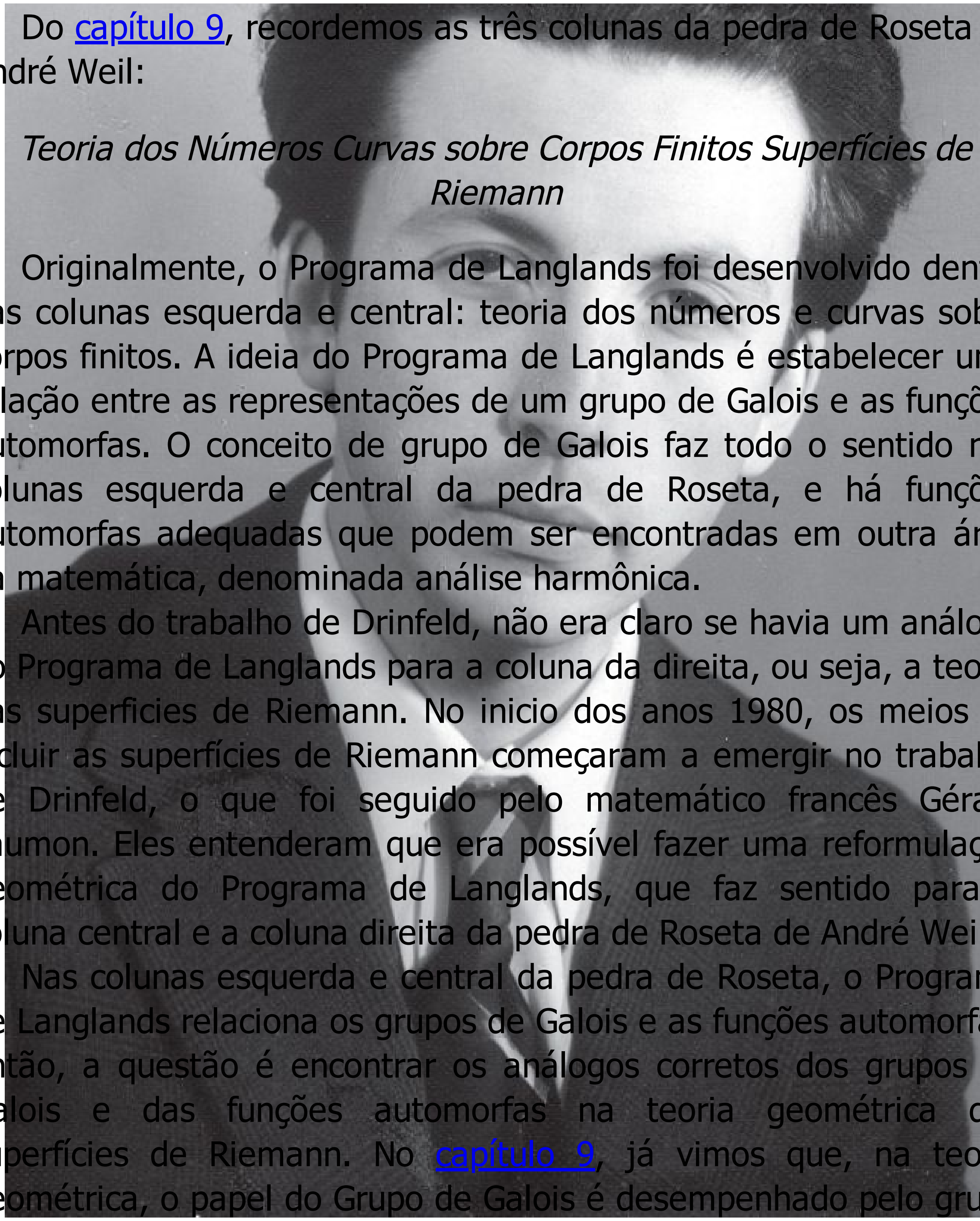
Em Moscou, foram feitas tentativas para contratar Drinfeld. Contaram-me que o físico Alexander Belavin, por exemplo, tentou leva-lopara o Instituto Landau de Física Teórica, perto de Moscou.

Para aumentar as chances de sucesso, Belavin e Drinfeld resolveram juntos um importante problema de classificação de soluções relativo à “clássica equação de Yang–Baxter”, no qual diversos físicos estavam interessados na época. O artigo deles foi publicado com grande aclamação na revista de Gelfand, *Functional Analysis and Applications* (acredito que esse foi o artigo mais longo já publicado por Gelfand, o que diz muito a respeito de sua importância). Foi esse trabalho que levou Drinfeld à teoria dos grupos quânticos, que revolucionou diversas áreas da matemática. Infelizmente, nenhum desses planos de contratação deu certo. O antissemitismo e a falta do *propiska* de Drinfeld em Moscou eram uma combinação fatal. Drinfeld permaneceu em Carcóvia, visitando Moscou raramente.

Na primavera de 1990, Drinfeld foi convidado a ir a Harvard, e isso acabou sendo uma agradável surpresa para mim. Ele chegou no fim de janeiro. Tendo ouvido falar de todas as lendas a seu respeito, fiquei um pouco intimidado inicialmente, mas ele acabou se revelando extremamente gentil e generoso. Afável, pesando cuidadosamente suas palavras, Drinfeld também era um verdadeiro modelo de clareza quando falava de matemática. Quando ele explicava as coisas para você, não tentava fazer isso de maneira autoenaltecedora, como se estivesse revelando um grande mistério que você jamais seria capaz de entender plenamente sozinho (o que infelizmente é o caso de alguns de nossos colegas, que devem permanecer anônimos). Ao contrário, Drinfeld sempre era capaz de apresentar as coisas da maneira mais simples e clara possível; assim, após ele explicar algo, parecia que você sabia tudo desde o início.



Drinfeld me disse de imediato que estava muito interessado em meu trabalho com Feigin e que queria utilizá-lo no seu novo projeto relacionado com o Programa de Langlands.



Do capítulo 9, recordemos as três colunas da pedra de Roseta de André Weil:

Teoria dos Números Curvas sobre Corpos Finitos Superfícies de Riemann

Originalmente, o Programa de Langlands foi desenvolvido dentro das colunas esquerda e central: teoria dos números e curvas sobre corpos finitos. A ideia do Programa de Langlands é estabelecer uma relação entre as representações de um grupo de Galois e as funções automorfas. O conceito de grupo de Galois faz todo o sentido nas colunas esquerda e central da pedra de Roseta, e há funções automorfas adequadas que podem ser encontradas em outra área da matemática, denominada análise harmônica.

Antes do trabalho de Drinfeld, não era claro se havia um análogo do Programa de Langlands para a coluna da direita, ou seja, a teoria das superficies de Riemann. No inicio dos anos 1980, os meios de incluir as superfícies de Riemann começaram a emergir no trabalho de Drinfeld, o que foi seguido pelo matemático francês Gérard Laumon. Eles entenderam que era possível fazer uma reformulação geométrica do Programa de Langlands, que faz sentido para a coluna central e a coluna direita da pedra de Roseta de André Weil.

Nas colunas esquerda e central da pedra de Roseta, o Programa de Langlands relaciona os grupos de Galois e as funções automorfas. Então, a questão é encontrar os análogos corretos dos grupos de Galois e das funções automorfas na teoria geométrica das superfícies de Riemann. No capítulo 9, já vimos que, na teoria geométrica, o papel do Grupo de Galois é desempenhado pelo grupo fundamental da superfície de Riemann. No entanto, deixamos inexplorados os análogos geométricos das funções automorfas.

Acontece que os análogos geométricos corretos não são funções, mas sim o que os matemáticos denominam *feixes.*

Para explicar o que são, vamos falar sobre os números. Temos os números naturais: 1, 2, 3,… e, claro, eles têm inúmeros usos. Um deles é que medem dimensões. Como discutimos no capítulo 10, uma linha é unidimensional, um plano é bidimensional e, para qualquer número natural *n,* temos um espaço plano *n*-dimensional, também conhecido como espaço vetorial.[1] Agora, imaginemos um mundo em que os números naturais são substituídos por espaços vetoriais; ou seja, em vez do número 1, temos uma linha; em vez do número 2, temos um plano; e assim por diante.

Nesse novo mundo, a adição dos números é substituída por aquilo que os matemáticos denominam soma direta dos espaços vetoriais. Dados dois espaços vetoriais, cada um com seu próprio sistema de coordenadas, criamos um novo, que combina as coordenadas dos dois espaços vetoriais; assim, sua dimensão é a soma de duas dimensões. Por exemplo, uma linha possui uma coordenada, e um plano possui duas. Combinando-as, obtemos um espaço vetorial com três coordenadas. Esse é o nosso espaço tridimensional.

A multiplicação dos números naturais é substituída por outra operação nos espaços vetoriais: dados dois espaços vetoriais, produzimos um terceiro, denominado produto tensorial. Não darei aqui uma definição exata de produto tensorial; o ponto importante é que, se dois espaços vetoriais que começamos possuem dimensões m e n, então seu produto vetorial possui dimensão $m \cdot n$.

Portanto, temos operações em espaços vetoriais que são análogas a operações de adição e multiplicação de números naturais. No entanto, esse mundo paralelo de espaços vetoriais é muito mais rico que o mundo dos números naturais! Um dado número não possui estrutura interna. O número 3, por exemplo, considerado em si mesmo, não possui simetrias. Mas um espaço tridimensional possui. De fato, vimos que qualquer elemento do grupo de Lie $SO(3)$ origina uma rotação do espaço tridimensional. O número 3 é uma mera sombra do espaço tridimensional, refletindo apenas um atributo de seu espaço, sua dimensio-nalidade. Contudo, esse número não consegue fazer justiça com outros aspectos dos espaços vetoriais, como suas simetrias.

Na matemática moderna, criamos um novo mundo, em que os números ganham vida como espaços vetoriais. Todos eles dispõem de uma vida rica e gratificante, e também possuem mais relações mútuas significativas, que não podem ser reduzidas à mera adição e multiplicação. De fato, podemos subtrair 1 de 2 de uma única maneira. No entanto, podemos incorporar uma linha num plano de diversas maneiras diferentes.

Ao contrário dos números naturais, que formam um conjunto, os espaços vetoriais formam uma estrutura mais sofisticada, que os matemáticos denominam categoria. Uma determinada categoria possui "objetos", como espaços vetoriais, mas, além disso, há "morfismos" de um objeto em relação a qualquer outro objeto.[2] Por exemplo, os morfismos de um objeto em relação a si mesmo, numa determinada categoria, são basicamente as simetrias daquele objeto que são permitidas dentro dessa categoria. Portanto, a linguagem das categorias nos permite focar não aquilo em que os objetos consistem, mas o modo como eles interagem. Dessa maneira, a teoria matemática das categorias acaba se revelando especialmente bem adaptada à ciência da computação.[3] O desenvolvimento das linguagens de programação funcional, como Haskell, é apenas um exemplo de diversas aplicações recentes.[4] Parece inevitável que as próximas gerações de computadores sejam baseadas mais na teoria das categorias do que na teoria dos conjuntos, e as categorias ingressarão em nosso cotidiano, independentemente de as percebermos ou não.

A mudança de paradigma de conjuntos para categorias também é uma das forças motoras da matemática moderna. É referida como *categorização.* Em essência, estamos criando um novo mundo, em que os conceitos familiares são elevados a um nível superior. Por exemplo, os números são substituídos por espaços vetoriais. A próxima pergunta é: quais devem ser as funções nesse novo mundo?

Para respondê-la, vamos rever a noção de função. Vamos supor que temos uma forma geométrica, como uma esfera ou um círculo, ou a superfície de uma rosca. Vamos chamá-la de S. Como já discutimos anteriormente, os matemáticos referem-se a tais formas como variedades. Uma função f, numa variedade S, é uma regra que atribui a cada ponto s, em S, um número, denominado valor da função f, no ponto s. Denotamos isso por $f(s)$.

Um exemplo de uma função é a temperatura, com nossa variedade S sendo simplesmente o espaço tridimensional em que vivemos. Em cada ponto s, podemos medir a temperatura, que é um número. Isso nos dá uma regra atribuindo a cada ponto um número; assim, obtemos uma função. Da mesma forma, a pressão atmosférica também nos dá uma função.

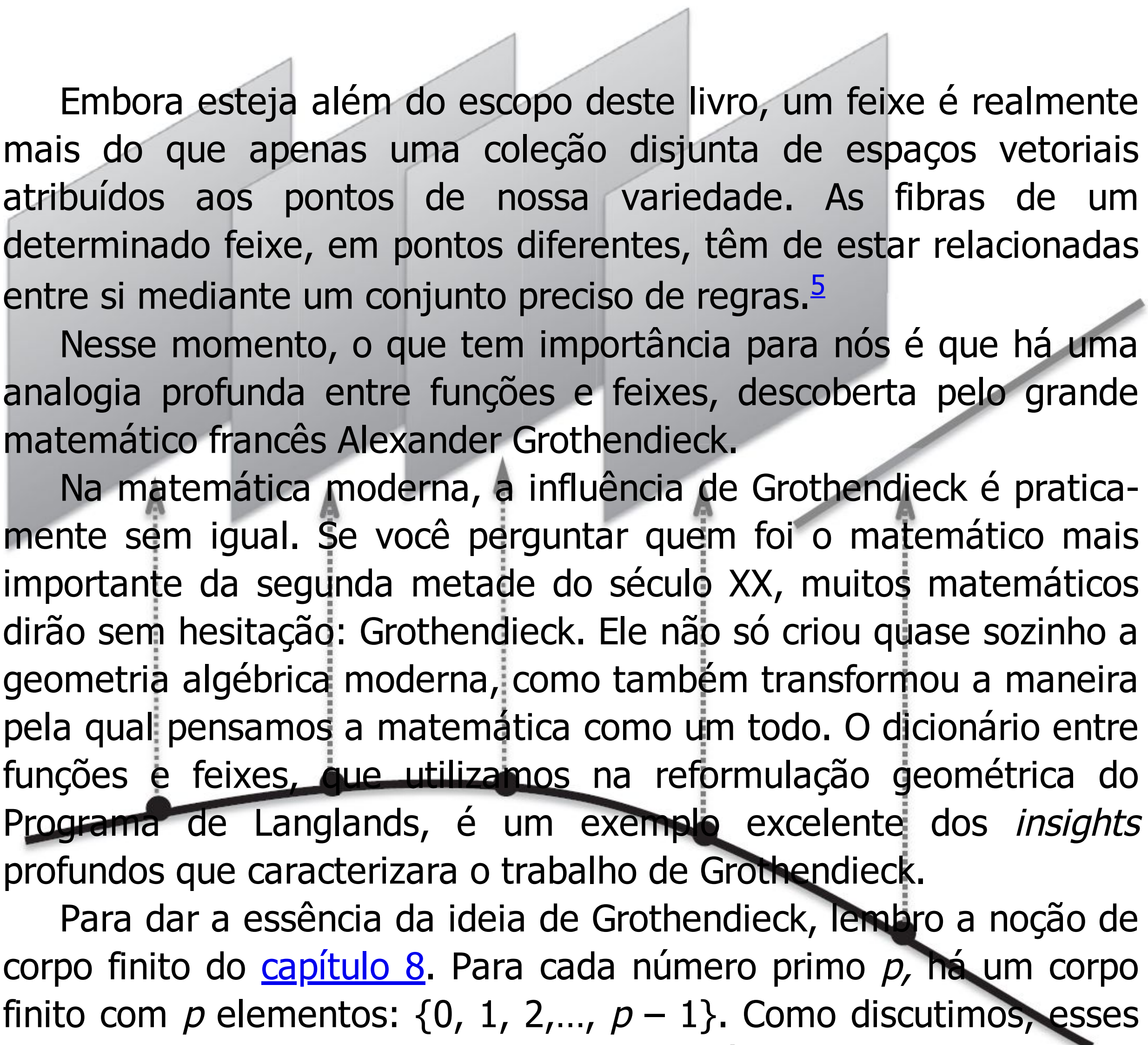
Para um exemplo mais abstrato, consideremos que S seja um círculo. Cada ponto do círculo é determinado por um ângulo, que, como anteriormente, denominaremos φ. Seja f a função seno. Então, o valor dessa função, no ponto do círculo correspondente ao ângulo φ, é seno(φ). Por exemplo, se φ = 30 graus (ou $\pi/6$, se medirmos ângulos em radianos, em vez de graus), então o valor da função seno é 1/2. Se φ = 60 graus (ou $\pi/3$), então é

$\sqrt{3}/2$

, e assim por diante.

Agora, vamos substituir os números por espaços vetoriais. Assim, uma função se tornará uma regra que atribui em cada ponto s, numa variedade S, não um número, mas um espaço vetorial. Essa regra é denominada *feixe.* Denotaremos um feixe usando o símbolo F; então, o espaço vetorial atribuído a um ponto s será denotado por $F(s)$.

Portanto, a diferença entre funções e feixes está no que atribuímos a cada ponto de nossa variedade S: para funções, atribuímos números; e, para feixes, atribuímos espaços vetoriais. Para um determinado feixe, esses espaços vetoriais podem ser de dimensões diferentes para distintos pontos *s*. Por exemplo, na figura abaixo, a maioria desses espaços vetoriais é plana (isto é, são espaços vetoriais bidimensionais), mas há um que é uma linha (isto é, um espaço vetorial unidimensional). Os feixes são categorizações das funções, da mesma forma que os espaços vetoriais são categorizações de números.



Embora esteja além do escopo deste livro, um feixe é realmente mais do que apenas uma coleção disjunta de espaços vetoriais atribuídos aos pontos de nossa variedade. As fibras de um determinado feixe, em pontos diferentes, têm de estar relacionadas entre si mediante um conjunto preciso de regras.[5]

Nesse momento, o que tem importância para nós é que há uma analogia profunda entre funções e feixes, descoberta pelo grande matemático francês Alexander Grothendieck.

Na matemática moderna, a influência de Grothendieck é praticamente sem igual. Se você perguntar quem foi o matemático mais importante da segunda metade do século XX, muitos matemáticos dirão sem hesitação: Grothendieck. Ele não só criou quase sozinho a geometria algébrica moderna, como também transformou a maneira pela qual pensamos a matemática como um todo. O dicionário entre funções e feixes, que utilizamos na reformulação geométrica do Programa de Langlands, é um exemplo excelente dos *insights* profundos que caracterizara o trabalho de Grothendieck.

Para dar a essência da ideia de Grothendieck, lembro a noção de corpo finito do capítulo 8. Para cada número primo *p, há* um corpo finito com *p* elementos: {0, 1, 2,…, *p* – 1}. Como discutimos, esses elementos *p* abrangem um sistema numérico com operações de adição, subtração, multiplicação e divisão módulo *p*, que obedecem às mesmas regras das operações correspondentes com números racionais e reais.

No entanto, também há algo especial sobre esse sistema numérico. Se você considerar qualquer elemento do corpo finito {0, 1, 2,…, $p - 1$} e elevá-lo à p-ésima potência – no sentido do módulo aritmético p que discutimos anteriormente –, obterá de volta o mesmo número! Em outras palavras,

$$a^p = a \text{ módulo } p.$$

Essa fórmula foi demonstrada por Pierre de Fermat, o matemático que propôs o Último Teorema de Fermat. Ao contrário da explicação deste último, a demonstração da fórmula acima é razoavelmente simples. Pode até caber na margem da página de um livro. Eu a apresento no fim deste livro.[6] Para distinguir esse resultado do Último Teorema de Fermat (às vezes também chamado de Grande Teorema de Fermat), ele é chamado de pequeno teorema de Fermat.

Por exemplo, fixe $p = 5$. Então, nosso corpo finito é {0, 1, 2, 3, 4}. Elevemos cada um deles à quinta potência. Sem dúvida, 0 elevado a qualquer potência é 0, e 1 elevado a qualquer potência é 1; assim, não há nenhuma surpresa nesse caso. Em seguida, eleve 2 à quinta potência: obtemos 32. No entanto, $32 = 2 + 5 \cdot 6$; assim, o módulo 5 disso é 2 – obtemos de volta 2, como prometido. Consideremos a quinta potência de 3: obtemos 243, mas isso é $3 + 5 \cdot 48$; assim, é 3 módulo 5. Novamente, obtemos de volta o número que começamos. E, finalmente, vamos tentar a mesma coisa com 4: sua quinta potência é 1.024, que é 4 módulo 5. Bingo! Incentivo-o a verificar que $a^3 = a$ módulo 3, e $a^7 = a$ módulo 7 (para números primos maiores, você talvez precise de uma calculadora para verificar o pequeno teorema de Fermat).

O notável também é que uma equação similar constitui a base do algoritmo de criptografia RSA, amplamente utilizado em operações bancárias on-line.[7]

Essa fórmula $a^p = a$ é mais do que uma descoberta perfeita; significa que a operação de elevar números à p-ésima potência, mandando a para a^p, é um elemento do grupo de Galois do corpo finito. Denominase simetria de Frobenius ou simplesmente Frobenius. Constata-se que o grupo de Galois do corpo finito de p elementos é gerado pelo Frobenius.[8]

Voltemos à ideia de Grothendieck. Começamos na coluna central da pedra de Roseta de Weil. Em seguida, estudamos as curvas sobre corpos finitos e variedades mais genéricas sobre corpos finitos. Essas variedades são definidas pelos sistemas de equações polinomiais, como

$$y^2 + y = x^3 - x^2,$$

de que falamos a respeito no capítulo 9.

Vamos supor que temos um feixe nessa variedade. Há uma regra atribuindo um espaço vetorial para cada ponto dela, mas existe, na realidade, mais estrutura. A noção de feixe é definida de maneira que qualquer simetria do sistema numérico no qual nossa variedade é definida – que é, nesse caso, um corpo finito – origina uma simetria desse espaço vetorial. Em particular, a Frobenius, que é um elemento do grupo de Galois do corpo finito, origina necessariamente uma simetria (como uma rotação ou dilatação) desse espaço vetorial.

Agora, se temos uma simetria de um espaço vetorial, podemos produzir um número fora dele. Há uma técnica-padrão para fazer isso. Por exemplo, se nosso espaço vetorial é uma linha, então a simetria desse espaço que obtemos da Frobenius será uma dilatação: cada elemento z será transformado em Az, para algum número A. Então, o número que atribuímos para essa simetria é apenas A. E, para os espaços vetoriais de dimensão maior que um, consideramos o que se denomina traço de simetria.[9] Considerando o traço de Frobenius, no espaço *F(s),* atribuímos um número ao ponto *s*.

O caso mais simples é aquele em que a Frobenius atua como a simetria de identidade no espaço vetorial. Então, seu traço é igual à dimensão do espaço vetorial. Assim, nesse caso, considerando o traço de Frobenius, atribuímos a um espaço vetorial sua dimensão. No entanto, se a Frobenius não é a identidade, essa construção atribui a um espaço vetorial um número mais genérico, que não é necessariamente um número natural.

O resultado é que, se temos uma variedade *S* sobre um corpo finito {0, 1, 2, …, *p* – 1} (o que acontece se estamos na coluna central da pedra de Roseta de Weil), e se temos um feixe *F* em *S,* então, para cada ponto *s* de *S*, podemos atribuir um número. Isso nos dá a função em *S*. Portanto, se observarmos isso na coluna central da pedra de Roseta de Weil, temos uma maneira de partir de feixes para funções.

Grothendieck chamou isso de "dicionário de feixes a funções". No entanto, é um tipo curioso de dicionário. Com base no procedimento descrito acima, obtemos uma transição de feixes para funções. Além disso, as operações naturais nos feixes correspondem às operações naturais nas funções. Por exemplo, a operação de adotar a soma direta de dois feixes, definida de forma semelhante à soma direta de dois espaços vetoriais, corresponde à operação de adotar a soma de duas funções.

No entanto, não há maneira natural de promover a volta de funções para feixes.[10] Constata-se que só podemos fazer isso para algumas funções, não para todas. No entanto, se isso for possível, esse feixe transmitirá muitas informações adicionais que a função não tinha. Então, essas informações podem ser utilizadas para se obter o cerne daquela função. Um fato notável é que a maioria das funções que aparecem no Programa de Eanglands (na segunda coluna da pedra de Roseta de Weil) provém dos feixes.

Os matemáticos estudaram as funções, uma das ideias centrais em toda a matemática, durante séculos. É um conceito que compreendemos intuitivamente pensando na temperatura ou na pressão atmosférica. No entanto, o que as pessoas não reconheciam antes de Grothendieck é que, se estamos no contexto de variedades sobre corpos finitos (como curvas sobre corpo finito), podemos ir além das funções e trabalhar com feixes.

As funções eram, por assim dizer, os conceitos da matemática antiga, e os feixes são os conceitos da matemática moderna. Grothendieck mostrou que, em vários aspectos, os feixes são mais fundamentais; as funções são suas meras sombras.

Na segunda metade do século XX, essa descoberta estimulou muito o progresso da matemática. O motivo é que os feixes são objetos muito mais vitais e versáteis, com muito mais estrutura. Por exemplo, um feixe pode ter simetrias. Se elevamos uma função num feixe, podemos explorar essas simetrias e, dessa maneira, aprender muito mais do que somos capazes por meio de funções.

O que é especialmente importante para nós é que os feixes fazem sentido tanto na coluna central como na coluna direita da pedra de Roseta de Weil. Isso abre um caminho para deslocar o Programa de Langlands da coluna central para a coluna da direita.

Nesta, consideremos variedades que são definidas sobre números complexos. Por exemplo, consideremos as superfícies de Riemann como a esfera ou a superfície de uma rosca. Nesse cenário, as funções automorfas que aparecem nas colunas esquerda e central da pedra de Roseta de Weil não fazem muito sentido. Ao contrário dos feixes. Assim, depois que substituímos funções por feixes na coluna central (o que podemos fazer porque temos o dicionário de Grothendieck), recuperamos a analogia entre as colunas central e direita da pedra de Roseta de Weil.

Resumindo: quando passamos da coluna central da pedra de Roseta de Weil para a coluna da direita, precisamos fazer alguns ajustes nos dois lados da relação prevista pelo Programa de Langlands, pois as noções do grupo de Galois e as funções automorfas não têm equivalentes imediatos na geometria das superfícies de Riemann. Em primeiro lugar, o grupo de Galois encontra seu análogo no grupo fundamental de uma superfície de Riemann, como explicado no capítulo 9. Em segundo, utilizamos o dicionário de Grothendieck e, em vez das funções automorfas, consideramos os feixes que satisfazem propriedades análogas às das funções automorfas. Denominamos esses feixes de automorfismos.

Isso é ilustrado pelo quadro a seguir, em que temos as três colunas da pedra de Roseta, e as duas linhas, em cada coluna, contêm os nomes dos objetos nos dois lados da relação de Langlands específica a essa coluna.

Teoria dos números	*Curvas sobre corpos finitos*	*Superfícies de Riemann*
Grupo de Galois	Grupo de Galois	grupo fundamental
funções automorfas	funções automorfas ou feixes automorfos	feixes automorfos

Então, a questão é como construir esses feixes automorfos. Isso se mostrou um problema muito difícil. No início da década de 1980, Drinfeld propôs a primeira construção, no caso mais simples (construída com base num trabalho inédito anterior de Pierre Deligne). Alguns anos depois, as ideias de Drinfeld foram mais desenvolvidas por Gérard Laumon.

Quando me encontrei com Drinfeld, ele me disse que tinha proposto um método radicalmente novo para construir feixes automorfos. No entanto, a nova construção que ele previu dependia de determinada conjectura que ele achava que podía derivar de meu trabalho com Feigin a respeito das álgebras de Kac-Moody. Era inacreditável: meu trabalho podia ser útil para o Programa de Langlands?

A oportunidade de poder fazer algo relacionado ao Programa de Langlands me deixou ávido por aprender tudo que era conhecido a respeito dele. Naquela primavera, eu frequentava o escritório de Drinfeld, em Harvard, quase todos os dias, e o importunava com perguntas sobre o Programa de Langlands, às quais ele respondía pacientemente. Ele também fazia perguntas sobre o meu trabalho com Feigin, os detalhes referentes ao que era decisivo para aquilo que ele estava tentando fazer. No resto do dia, eu devorava qualquer coisa que conseguisse encontrar sobre o Programa de Langlands na biblioteca de Harvard. O assunto era tão atraente que eu tentava adormecer o mais rápido possível todas as noites, para poder acordar cedo e me aprofundar cada vez mais no Programa de Langlands. Sabia que estava iniciando um dos projetos mais importantes da minha vida.

Outra coisa aconteceu perto do fim do semestre da primavera que me levou de volta à experiência kafkiana relativa ao meu exame vestibular na Universidade de Moscou.

Certo dia, Victor Kac ligou para minha casa em Cambridge e me disse que alguém convidara Anatoly Logunov, reitor da Universidade de Moscou, para dar uma palestra no departamento de física do MIT. Kac e muitos de seus colegas ficaram indignados com o fato de que o MIT desse espaço para o homem diretamente responsável pela discriminação contra os estudantes judeus nos exames vestibulares da MGU. Kac e os outros achavam que as ações de Logunov equivaliam a um crime e, portanto, o convite era escandaloso.

Logunov era um homem muito poderoso: ele não era só o reitor da MGU, mas também diretor do Instituto de Física de Altas Energias, membro do Comitê Central do Partido Comunista da URSS etc. Mas por que alguém do MIT o convidaria? De qualquer forma, Kac e diversos colegas seus protestaram e pediram que a visita e a palestra fossem canceladas. Depois de algumas negociações, chegou-se a um acordo: Logunov viria e daria sua palestra, mas, depois dela, haveria um debate público sobre a situação da MGU, e as pessoas teriam a oportunidade de confrontá-lo acerca da discriminação. Seria algo como uma reunião pública.

Naturalmente, Kac me pediu para comparecer ao encontro e apresentar minha história como evidência direta do que estava acontecendo na MGU sob a liderança de Logunov. Relutei um pouco em aceitar o convite. Tinha certeza de que Logunov estaria acompanhado por “assessores”, que estariam registrando tudo. Lembremos: era maio de 1990, mais de um ano antes do *putsch* fracassado de agosto de 1991, que iniciou o colapso da União Soviética. E eu estava prestes a voltar para casa para passar o verão. Se eu dissesse algo até mesmo suavemente embaraçoso para um funcionário soviético importante como Logunov, poderia facilmente me meter em apuros. No mínimo, poderiam me impedir de deixar a União Soviética e retornar para Harvard. No entanto, não podia dizer não ao pedido de Kac. Sabia como meu testemunho podia ser importante nesse encontro; assim, disse para Victor que eu iria e, se necessário, contaria minha história. Kac procurou me tranquilizar.

– Não se preocupe, Edik – ele disse. – Se eles o prenderem por causa disso, farei tudo ao meu alcance para libertá-lo.

A notícia a respeito do evento se espalhou rapidamente, e o anfiteatro estava lotado para a palestra de Logunov. As pessoas não foram para aprender algo. Todos sabiam que Logunov era um físico inapto, que fez carreira tentando refutar a teoria da relatividade de Einstein (eu imagino o porquê). Como esperado, a palestra – a respeito de sua “nova” teoria da gravidade – tinha muito pouco conteúdo. No entanto, foi bastante incomum, em muitos aspectos. Em primeiro lugar, Logunov não falava inglês e apresentou-se em russo, com a tradução simultânea feita por um homem alto, de terno e gravata pretos, que falava um inglês perfeito. Ele também podia ter “KGB” escrito em sua testa, em grandes letras maiúsculas. Seu clone (como no filme *Matrix)* estava sentado na plateia, olhando ao redor.

Antes da palestra, um dos anfitriões de Logunov no MIT apresentouo de uma maneira muito peculiar. Ele projetou um slide da primeira página de um artigo em inglês de autoria de Logunov e outras pessoas, publicado uma década antes. Suponho que a intenção era mostrar que Logunov não era um idiota total, mas, na realidade, tinha, ao seu crédito, alguns artigos em publicações especializadas. Jamais vira alguém ser apresentado dessa maneira. Ficou evidente que Logunov não fora convidado ao MIT por sua genialidade científica.

Durante a palestra, não ocorreram protestos, embora Kac tivesse distribuído cópias de alguns documentos desfavoráveis a Logunov para a plateia. Um deles era de um colega com sobrenome judeu de uma década antes. Ele tinha notas A em todas as matérias e, no entanto, no último ano na MGU, foi expulso por "insuficiência acadêmica". Uma curta observação adicionada ao documento informava ao leitor que esse estudante foi localizado por agentes na sinagoga de Moscou.

Após a palestra, as pessoas se dirigiram para outra sala e se sentaram em torno de uma grande mesa retangular. Logunov se sentou próximo de uma extremidade, ladeado por dois "assessores", em trajes informais, que atuavam como intérpretes. Kac e outros acusadores se sentaram no outro lado da mesa, diante deles. Sentei-me com alguns amigos na extremidade oposta da mesa em relação a Logunov. Assim, ele não prestou nenhuma atenção em nós.

Inicialmente, Kac e outros afirmaram que tinham escutado muitas histórias a respeito da não admissão de estudantes judeus na MGU. Perguntaram para Logunov se ele, como reitor da Universidade de Moscou, tinha algum comentário a fazer sobre isso. Claro que ele negou categoricamente tudo, independentemente do que dissessem. Em certo momento, um dos "assessores" afirmou, em inglês:

– Sabe, o professor Logunov é uma pessoa muito modesta. Ele jamais diria isso a vocês. Mas eu direi. Na realidade, ele ajudou muitos judeus em suas carreiras.

Então, o outro "assessor" disse para Kac e os outros:

– Se vocês têm casos concretos a respeito dos quais desejam falar, apresentem a ele. Caso contrário, o professor Logunov está muito ocupado e tem outras coisas para fazer.

Nesse momento, Kac afirmou:

– Na realidade, temos um caso concreto sobre o qual queremos falar. – Então, ele me indicou com um gesto.

Eu me levantei. Todos se viraram para mim, incluindo Logunov e seus "assessores", com suas expressões denunciando alguma ansiedade. Naquele momento, encarei Logunov diretamente.

– Muito interessante – Logunov afirmou, em russo. Isso tinha de ser traduzido para o inglês para todos. E então, disse em voz baixa para seus assessores, mas consegui ouvir: – Não se esqueçam de pegar o nome dele.

Devo confessar: era assustador, mas eu tinha alcançado um ponto sem retorno. Apresentei-me e disse: – Há seis anos, fui reprovado nas provas de admissão do *Mekh-Mat.*

Em seguida, descrevi suscintamente o que acontecera nas provas. A sala emudeceu. Era um relato "concreto", em primeira mão, de uma das vítimas da política de Logunov, e não havia nenhum jeito de ele poder negar que aquilo tinha acontecido. Os dois assessores se apressaram em minorar o prejuízo.

– Então você foi reprovado na MGU. Depois disso, você se candidatou para que faculdade? – um deles perguntou.

– Entrei no Instituto de Petróleo e Gás – respondi.

– Ele ingressou em Kerosinka – traduziu o assessor para Logunov. Então, ele fez que sim com a cabeça de modo enérgico. Claro que Logunov sabia que o instituto era um dos poucos lugares em Moscou onde estudantes como eu eram aceitos.

– Bem, talvez a concorrência no Instituto de Petróleo e Gás não fosse tão acirrada quanto na MGU – o assessor prosseguiu. – Talvez seja por isso que você foi admitido no instituto, mas não na MGU?

Aquilo era falso: eu sabia com certeza que havia pouca concorrência no *Mekh-Mat* entre aqueles que não eram discriminados. Disseram-me que bastavam um B e três Cs nas quatro provas para ingressar no Departamento de Mecânica e Matemática. O vestibular para Kerosinka, ao contrário, era muito concorrido.

Nesse momento, Kac interveio:

– Enquanto estudante, Edward realizou um trabalho inovador em matemática e, aos 21 anos, foi convidado para ser professor visitante em Harvard, menos de cinco anos depois da sua reprovação na MGU. Vocês vão sugerir que a concorrência por uma vaga em Harvard também era menor que por uma na MGU?

Houve um longo silêncio. Então, subitamente, Logunov ficou muito animado.

– Sinto-me indignado com isso! – ele gritou. – Vou investigar e punir os responsáveis pela reprovação desse jovem. Não vou permitir que essas coisas aconteçam na MGU!

E, por alguns minutos, ele prosseguiu falando.

O que alguém podia dizer ante aquela manifestação? Na mesa, ninguém acreditava na autenticidade da indignação de Logunov e que ele realmente fosse fazer alguma coisa. Logunov era muito esperto. Ao manifestar sua indignação fingida a respeito de um caso, ele desviou a atenção de uma questão muito maior: os milhares de estudantes que foram reprovados cruelmente como resultado de uma política de discriminação cuidadosamente orquestrada, que foi aprovada pela alta direção da MGU, incluindo o próprio reitor.

Não podíamos apresentar aqueles casos naquele encontro e demonstrar que havia uma política orquestrada de antissemitismo no vestibular para o *Mekh-Mat.* Embora houvesse um certo grau de satisfação com o fato de que fui capaz de encarar meu atormentador diretamente e de forçá-lo a admitir que fui injustiçado pelos seus subordinados, todos nós sabíamos que a questão maior continuava sem resposta.

Os anfitriões de Logunov, que ficaram claramente constrangidos com toda a publicidade negativa que cercou a visita dele, quiseram acabar logo com aquilo. Eles deram fim ao encontro e o levaram embora rapidamente. Logunov nunca mais foi convidado de volta.

Capítulo 15

Uma dança delicada

No outono de 1990, tornei-me estudante de doutorado em Harvard, o que tive de fazer para passar de professor visitante para algo mais permanente. Joseph Bernstein concordou em ser meu orientador oficial. Naquela altura, já tinha material mais do que suficiente para uma tese, e Arthur Jaffe conseguiu que o reitor abrisse mão do requisito de admissão de dois anos para mim, para que eu pudesse obter meu doutorado em um ano. Dessa maneira, meu "rebaixamento" de professor para estudante de pós-graduação não durou muito tempo.

De fato, elaborei minha tese de doutorado a respeito de um novo projeto, que concluí naquele ano. Tudo começou na primavera, a partir de minhas discussões com Drinfeld a respeito do Programa de Langlands. Eis uma delas, em forma de roteiro:

FADE IN:

INTERIOR – ESCRITÓRIO DE DRINFELD, EM HARVARD

Drinfeld está andando diante do quadro-negro. Edward, sentado numa cadeira, está anotando. Uma caneca de chá está sobre a mesa, ao seu lado.

DRINFELD

Então, a conjectura de Shimura–Taniyama–Weil nos dá uma ligação entre as equações cúbicas e as formas modulares, mas Langlands foi muito mais longe do que isso. Ele anteviu uma relação mais geral, em que o papel das formas modulares é desempenhado pelas representações automorfas de um grupo de Lie.

EDWARD

O que é uma representação automorfa?

DRINFELD

(Após uma longa pausa) Neste momento, a definição exata não é importante. E, seja como for, você pode lê-la num livro. O importante é que é uma representação de um grupo de Lie G – por exemplo, o grupo *SO*(3) de rotações de uma esfera.

EDWARD

OK. E com o que essas representações automorfas se relacionam?

DRINFELD

Bem, essa é a parte mais interessante: Langlands previu que devem se relacionar com representações do grupo de Galois, em outro grupo de Lie.[1]

EDWARD

Entendo. Você quer dizer que esse grupo de Lie não é o mesmo grupo G?

DRINFELD

Não! É outro grupo de Lie, que é denominado grupo dual de Langlands de G.

Drinfeld escreve o símbolo ^{L}G no quadro-negro.

EDWARD

O *L* é de Langlands?

DRINFELD

(Insinuação de um sorriso) Bem, a motivação original de Langlands foi entender algo denominado *L*-funções. Assim, ele chamou esse grupo de *L*-grupo…

EDWARD

Deixe-me ver se eu entendi. Para cada grupo de Lie G, há outro grupo de Lie denominado ^LG. Certo?

DRINFELD

Certo. E isso aparece na relação de Langlands, cuja aparência esquemática vou lhe mostrar.

Drinfeld desenha um diagrama no quadro-negro:[2]

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{representação do}\\ \text{grupo de Galois in}\ ^LG\end{array}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{representações automorfas}\\ \text{do grupo } G\end{array}}$$

EDWARD

Não entendi... Pelo menos, ainda não. Mas deixe-me fazer uma pergunta mais simples: o que é um grupo dual de Langlands de *SO*(3), por exemplo?

DRINFELD

Essa é muito fácil: é a cobertura dupla de *SO*(3). Você viu o truque da caneca?

EDWARD

O truque da caneca? Ah, sim, eu me lembro...

CORTA PARA:

INTERIOR – UMA FESTA DOS ALUNOS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE HARVARD

Cerca de doze estudantes, entre 20 e 25 anos, estão conversando, e bebendo cerveja e vinho. Edward conversa com um estudante.

ESTUDANTE

É assim que funciona.

O estudante pega uma caneca de plástico com vinho e a põe sobre a palma aberta de sua mão direita. Então, ele começa a girar a palma e o braço (como exibido na série de fotos a seguir). Depois de ele realizar um giro completo (360 graus), os braços dele ficam torcidos. Mantendo a caneca em pé, ele continua girando, e, após outro giro completo – surpresa! –, o braço dele e a caneca voltam para a posição inicial, destorcida.[3]

OUTRO ESTUDANTE

Ouvi falar que os filipinos têm uma dança do vinho tradicional, em que fazem isso com as duas mãos.[4]

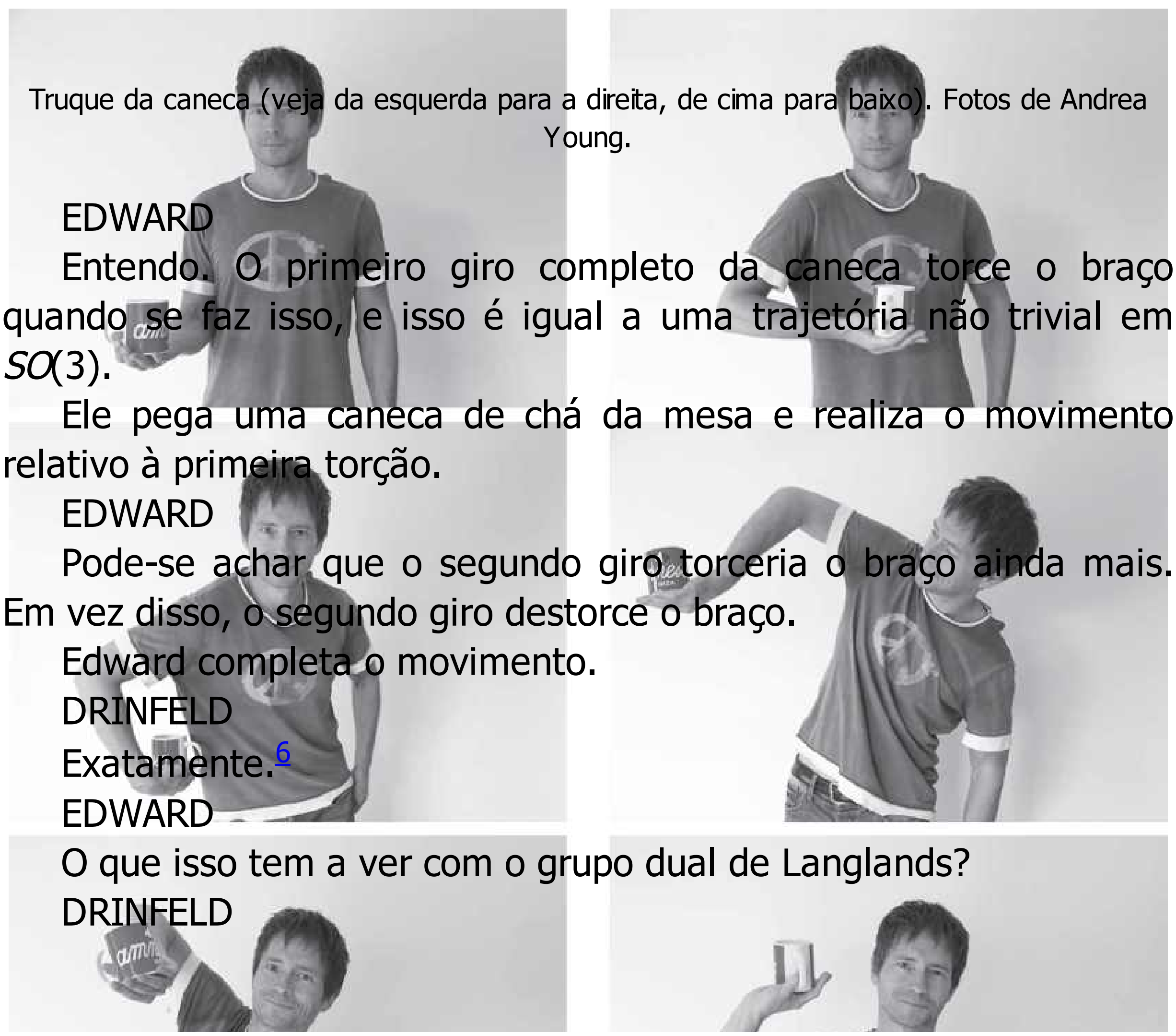
Ele pega duas canecas de cerveja e tenta girar as duas simultaneamente, mas suas mãos vacilam, e ele derrama cerveja das duas canecas. Todos dão risadas.

CORTA PARA:

INTERIOR – ESCRITÓRIO DE DRINFELD NOVAMENTE

DRINFELD

O truque ilustra o fato de que há uma trajetória fechada no grupo $SO(3)$, que não é trivial, mas, se percorrermos essa trajetória duas vezes, obteremos uma trajetória trivial.[5]



Truque da caneca (veja da esquerda para a direita, de cima para baixo). Fotos de Andrea Young.

EDWARD

Entendo. O primeiro giro completo da caneca torce o braço quando se faz isso, e isso é igual a uma trajetória não trivial em $SO(3)$.

Ele pega uma caneca de chá da mesa e realiza o movimento relativo à primeira torção.

EDWARD

Pode-se achar que o segundo giro torceria o braço ainda mais. Em vez disso, o segundo giro destorce o braço.

Edward completa o movimento.

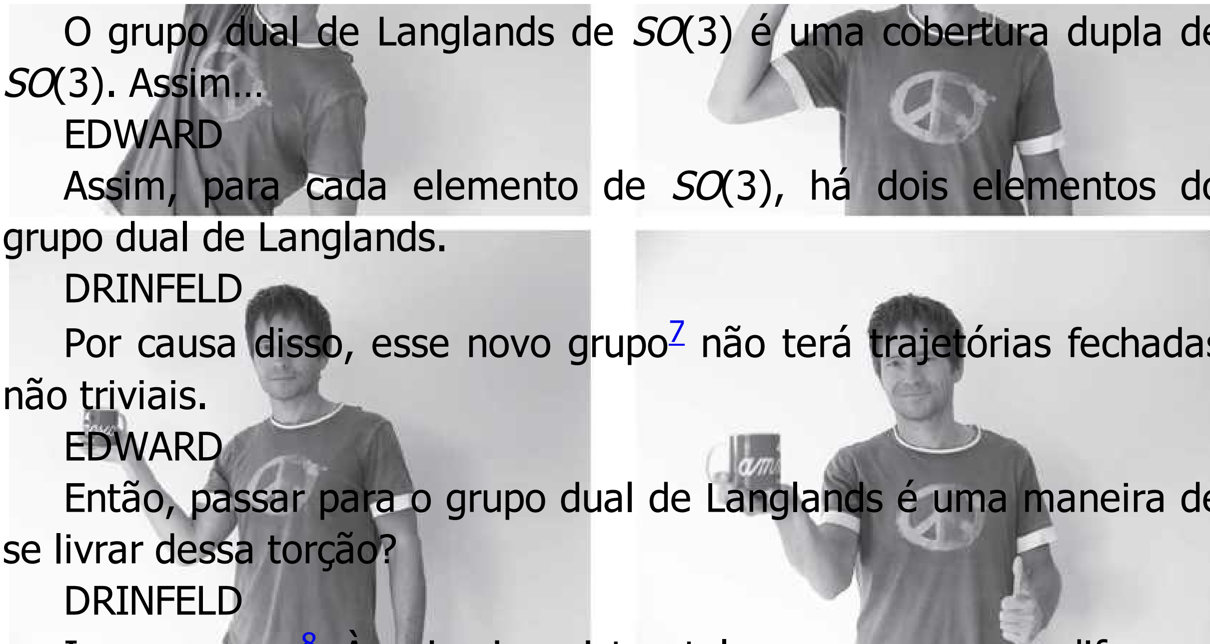
DRINFELD

Exatamente.[6]

EDWARD

O que isso tem a ver com o grupo dual de Langlands?

DRINFELD



O grupo dual de Langlands de $SO(3)$ é uma cobertura dupla de $SO(3)$. Assim…

EDWARD

Assim, para cada elemento de $SO(3)$, há dois elementos do grupo dual de Langlands.

DRINFELD

Por causa disso, esse novo grupo[7] não terá trajetórias fechadas não triviais.

EDWARD

Então, passar para o grupo dual de Langlands é uma maneira de se livrar dessa torção?

DRINFELD

Isso mesmo.[8] À primeira vista, talvez pareça uma diferença menor, mas, na realidade, tem consequências importantes, como a diferença de comportamento entre os elementos básicos da matéria, como os elétrons e os quarks, e as partículas que realizam interações entre eles, como os fótons. Para grupos de Lie mais genéricos, a diferença entre o grupo de seu grupo dual de Langlands é ainda mais pronunciada. De fato, em diversos casos, não há ligação evidente entre os dois grupos duais.

EDWARD

Por que o grupo dual aparece na relação de Langlands? Parece mágica…

DRINFELD

Na realidade, não sabemos.

FADE OUT

A dualidade de Langlands estabelece uma relação dois a dois entre os grupos de Lie: para cada grupo de Lie G, há um grupo de Lie ${}^LG$ dual de Langlands, e o dual de ${}^LG$ é o próprio G.[9] É bastante inesperado que o Programa de Langlands relacione dois tipos distintos de objetos (um da teoria dos números e outro da análise harmônica), mas o fato de que dois grupos duais, G e ${}^LG$, apareçam nos dois lados dessa relação, como exposto no diagrama da página 202, é surpreendente.

Discutimos sobre o Programa de Langlands ligando continentes distintos do mundo da matemática. Como uma analogia, digamos que esses continentes fossem Europa e América do Norte, e que tivemos uma maneira de corresponder cada pessoa da Europa com cada pessoa da América do Norte, e vice-versa. Além disso, vamos supor que, nessa relação, diversos atributos, tais como peso, altura e idade, corresponderam perfeitamente, mas que os gêneros foram trocados: cada homem correspondeu a uma mulher, e vice-versa. Então, isso seria como a troca entre um grupo de Lie e seu grupo dual de Langlands, na relação prevista pelo Programa de Langlands.

De fato, essa troca é o aspecto mais misterioso do Programa de Langlands. Conhecemos diversos mecanismos que descrevem como o grupo dual aparece, mas ainda não entendemos *por que* isso acontece. Essa ignorância é um dos motivos pelos quais tentamos expandir as ideias do Programa de Langlands a outros ramos da matemática (por meio da pedra de Roseta de Weil) e, depois, à física quântica, como veremos no próximo capítulo. Queremos encontrar mais exemplos da aparência do grupo dual de Langlands e esperamos que isso nos dê mais pistas sobre por que isso acontece e o que significa.

Enfoquemos agora a coluna direita da pedra de Roseta de Weil, que diz respeito às superfícies de Riemann. Como estabelecemos no capítulo anterior (veja o quadro na página 196), na versão da relação de Langlands que se representa nessa coluna, o elenco de personagens possui "feixes automorfos", no papel de funções automorfas (ou representações automorfas) associadas a um grupo de Lie *G*. Acontece que esses feixes automorfos "vivem" num determinado espaço, ligado à superfície de Riemann *X* e ao grupo *G*, denominado espaço de módulos de *G*-fibrados em *X*. Agora, não é importante para nós o que é isso.[10] No outro lado da relação, o papel do grupo de Galois é desempenhado pelo grupo fundamental dessa superfície de Riemann, como vimos no capítulo 9. Do diagrama da página 202, constatamos, então, que a relação de Langlands geométrica (também conhecida como correspondência de Langlands geométrica) deve ter a seguinte aparência esquemática:

representações do grupo fundamental de X, em ^LG	$\longleftrightarrow$	feixes automorfos no espaço de módulos de G-fibrados, em X

Isso significa que, para cada representação do grupo fundamental em ^LG, devemos ser capazes de associar um feixe automorfo. E Drinfeld teve uma ideia radicalmente nova de como fazer isso.

FADE IN:

INTERIOR – ESCRITÓRIO DE DRINFELD

DRINFELD

Então temos de achar uma maneira sistemática de construir esses feixes automorfos. E acho que as representações das álgebras de Kac-Moody podem dar certo.

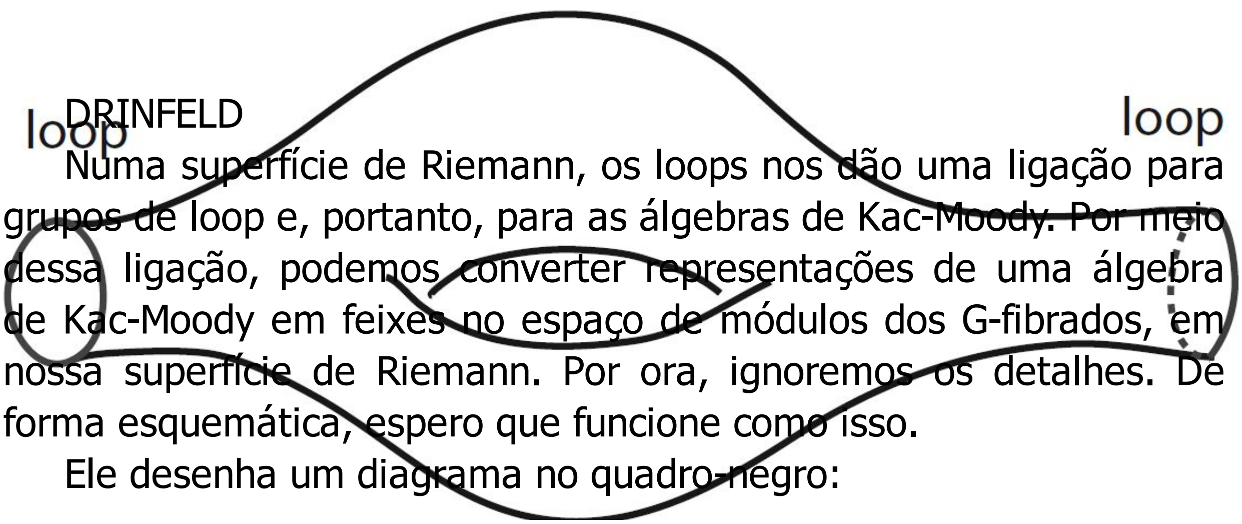
EDWARD

O que é isso?

DRINFELD

Agora estamos no mundo das superfícies de Riemann. Tal superfície deve ter um limite, que consiste de loops.

Drinfeld desenha uma figura no quadro-negro.



DRINFELD

Numa superfície de Riemann, os loops nos dão uma ligação para grupos de loop e, portanto, para as álgebras de Kac-Moody. Por meio dessa ligação, podemos converter representações de uma álgebra de Kac-Moody em feixes no espaço de módulos dos G-fibrados, em nossa superfície de Riemann. Por ora, ignoremos os detalhes. De forma esquemática, espero que funcione como isso.

Ele desenha um diagrama no quadro-negro:

$$\boxed{\text{Uma representação do grupo fundamental, em } {}^{L}G} \longrightarrow \boxed{\text{Uma representação da algebra de Kac–Moody de } G} \longrightarrow \boxed{\text{Um feixe automorfo no espaço de módulos dos } G\text{-fibrados}}$$

DRINFELD

A segunda seta é evidente para mim. A questão real é como construir a primeira seta. Feigin me falou de seu trabalho sobre as representações das álgebras de Kac-Moody. Acho que, nesse caso, você pode colocá-lo em uso.

EDWARD

No entanto, de certo modo, as representações da álgebra de Kac-Moody de *G* devem “conhecer” algo a respeito do grupo dual de Langlands ${}^{L}G$.

DRINFLED

Isso mesmo.

EDWARD

Como isso é possível?

DRINFELD

É isso o que você tem de descobrir.

FADE OUT

Acho que me senti um pouco como Neo falando com Morpheus, no filme *Matrix.* Era excitante, mas também um pouco assustador. Será que eu realmente seria capaz de dizer algo novo a respeito desse ramo da matemática?

Para explicar como eu abordei esse problema, preciso falar sobre um método eficiente de construir representações do grupo fundamental de uma superfície de Riemann. Fazemos isso utilizando equações diferenciais.

Uma equação diferencial é uma equação que relaciona uma função e suas derivadas. Como exemplo, consideremos um carro em movimento numa estrada reta. A estrada tem uma coordenada; denotemos essa coordena por x. A posição do carro no momento t, no tempo, é, então, codificada pela função $x(t)$. Por exemplo, pode ser que $x(t) = t^2$.

A velocidade do carro é a proporção entre a distância percorrida num pequeno período de tempo Δt e esse período de tempo:

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

Se o carro estivesse se movimentando com velocidade constante, não teria importância o período de tempo Δt considerado. No entanto, se o carro estiver mudando sua velocidade, então um Δt menor nos dará uma aproximação mais exata da velocidade no momento t. Para obtermos o valor instantâneo exato da velocidade naquele momento, temos de considerar o limite dessa proporção quando Δt tende a zero. Esse limite é a derivada de $x(t)$. É denotado por $x'(t)$.

Por exemplo, se $x(t) = t^2$, então $x'(t) = 2t$, e, em um amplo sentido, se $x(t) = t^n$, então $x'(t) = nt^{n-1}$. Não é difícil derivar essas fórmulas, mas, neste momento, isso não é essencial para nós.

Muitas leis da natureza podem ser enunciadas como equações diferenciais, isto é, equações envolvendo funções e suas derivadas. Por exemplo, as equações de Maxwell a respeito do eletromagnetismo, das quais falaremos a respeito no próximo capítulo, são equações diferenciais, assim como as equações de Einstein que descrevem a força da gravidade. De fato, a maioria dos modelos matemáticos (na física, na biologia, na química ou nos mercados financeiros) envolve equações diferenciais. Mesmo as perguntas mais simples que uma pessoa pode fazer a respeito de finanças pessoais, como, por exemplo, a maneira de calcular juros compostos, leva-nos rapidamente a equações diferenciais.

Eis um exemplo de equação diferencial:

$$x'(t) = \frac{2x(t)}{t}$$

A função $x(t) = t^2$ é uma solução dessa equação. De fato, temos $x'(t) = 2t$ e $2x(t)/t = 2t^2/t = 2t$; assim, substituindo $x(t) = t^2$ nos lados esquerdo e direito, obtemos a mesma expressão, $2t$. Além disso, constatase que qualquer solução dessa equação tem a forma $x(t) = Ct^2$, onde C é um número real independente de t (C significa "constante"). Por exemplo, $x(t) = 5t^2$ é uma solução.

Da mesma forma, as soluções da equação diferencial

$$x'(t) = \frac{nx(t)}{t}$$

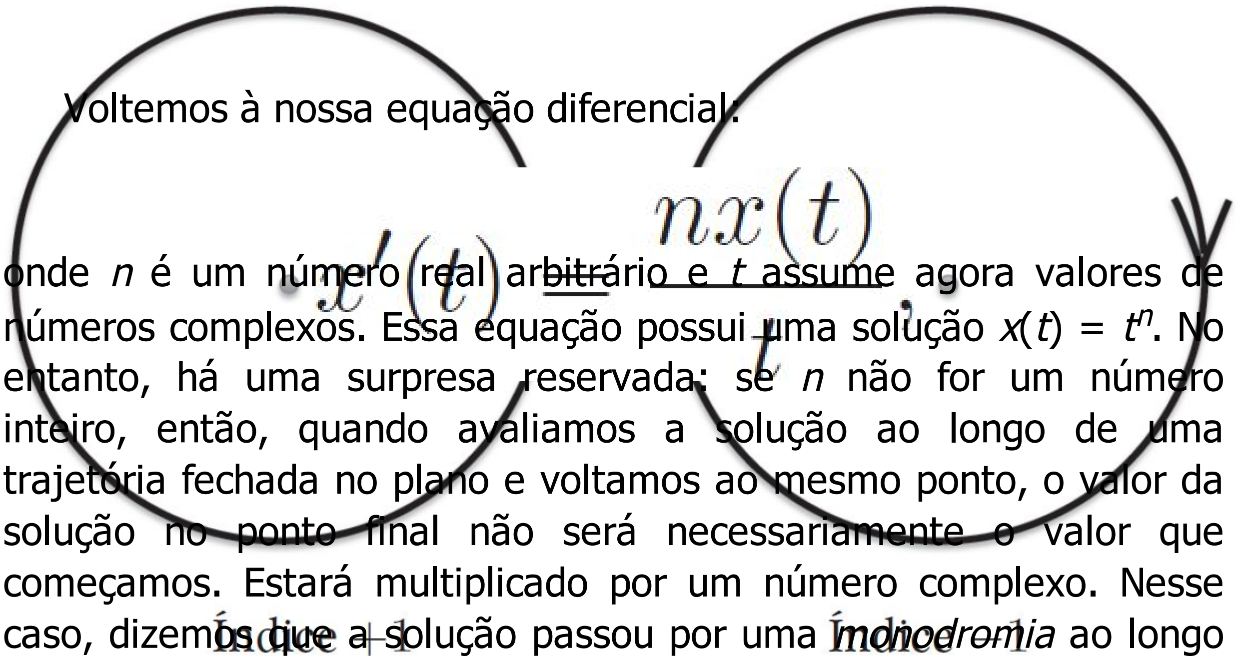
são dadas pela fórmula $x(t) = Ct^n$, onde C é um número real arbitrário.

Nesse caso, nada nos impede de permitir que n seja um número inteiro negativo. A equação ainda fará sentido, e a fórmula $x(t) = Ct^n$ ainda fará sentido, exceto que essa função não será mais definida em $t = 0$. Assim, excluamos $t = 0$ de consideração. Dessa maneira, também podemos permitir que n seja um número racional arbitrário e até mesmo um número real arbitrário.

E agora damos um passo adicional: na formulação original dessa equação diferencial, consideramos t como tempo; assim, foi assumido como número real. No entanto, vamos supor agora que t é um número complexo; tem a forma $x'(t) = \frac{nx(t)}{t}$, onde r e s são números reais. Como discutimos no capítulo 9 (veja a figura na página 126), os números complexos podem ser representados como pontos no plano por meio de coordenadas r e s. Depois de tornarmos t complexo, $x(t)$ se converte efetivamente numa função no plano. Bem, quer dizer, o plano menos um ponto. Como decidimos que $x(t)$ não pode ser definido no ponto $t = 0$, que é a origem desse plano (com as duas coordenadas, r e s, iguais a zero), $x(t)$ é realmente definido no plano, excluindo um ponto, a origem.

Em seguida, colocamos em jogo o grupo fundamental. Os elementos do grupo fundamental, como discutimos no capítulo 9, são trajetórias fechadas. Consideremos o grupo fundamental do plano com um ponto removido. Então, qualquer trajetória fechada possui um "índice"; isto é, o número de vezes que a trajetória dá voltas em torno do ponto removido. Se a trajetória é em sentido anti-horário, calculamos esse número com sinal positivo; se é em sentido horário, com sinal negativo.[11] As trajetórias fechadas com índices +1 e –1 são exibidas na figura.

Uma trajetória que dá duas voltas e cruza consigo mesma retornando até onde começou tem um índice de +2 ou –2, e assim por diante para trajetórias mais complicadas.



Voltemos à nossa equação diferencial:

$$x'(t) = \frac{nx(t)}{t},$$

onde *n* é um número real arbitrário e *t* assume agora valores de números complexos. Essa equação possui uma solução $x(t) = t^n$. No entanto, há uma surpresa reservada: se *n* não for um número inteiro, então, quando avaliamos a solução ao longo de uma trajetória fechada no plano e voltamos ao mesmo ponto, o valor da solução no ponto final não será necessariamente o valor que começamos. Estará multiplicado por um número complexo. Nesse caso, dizemos que a solução passou por uma *monodromia* ao longo dessa trajetória.

A afirmação de que algo muda quando percorremos um círculo completo pode parecer contrária à intuição e até mesmo autocontraditória, inicialmente. No entanto, tudo depende do que queremos dizer com "percorrendo um círculo completo". Podemos estar atravessando uma trajetória fechada e retornando ao mesmo ponto, no sentido de um atributo *específico,* tal como nossa posição no espaço. No entanto, outros atributos podem passar por mudanças.

Consideremos este exemplo: em 14 de março de 2010, Rick conheceu Ilsa num jantar festivo e se apaixonou num piscar de olhos. Inicialmente, Ilsa não pensou muito em Rick, mas concordou em sair com ele. Depois, saiu uma segunda vez. E uma terceira. Ilsa começou a gostar de Rick, pois ele era engraçado e inteligente, e cuidava dela. De repente, Ilsa também se apaixonou; ela até mudou seu status no Facebook para “em um relacionamento sério”, e Rick fez o mesmo. O tempo passou rápido e, em breve, era 14 de março novamente, o aniversário de um ano do dia em que eles se conheceram. Do ponto de vista do calendário – se apenas prestarmos atenção ao mês e ignorarmos o ano – Rick e Ilsa percorreram o círculo completo. No entanto, as coisas mudaram. No dia em que se conheceram, Rick se apaixonou e Isla não. Mas, um ano depois, esse não é mais o caso; de fato, eles podem estar igualmente apaixonados um pelo outro, ou talvez Ilsa esteja de corpo e alma, e Rick, só mais ou menos. É até mesmo possível que Rick tenha deixado de amar Ilsa e começado a sair secretamente com outra mulher. Não sabemos. O que é importante para nós é que, embora eles tenham voltado para a mesma data do calendário, 14 de março, o amor deles pode ter mudado.

Porém, meu pai me diz que esse exemplo é confuso, pois parece sugerir que Rick e Ilsa voltaram ao mesmo ponto no tempo, o que é impossível. No entanto, o que estou enfocando são atributos particulares: específicamente, dia e mês. A esse respeito, ir de 14 de março de 2010 para 14 de março de 2011 é realmente completar um círculo.

Contudo, talvez seja melhor considerar uma trajetória fechada no espaço. Assim, vamos supor que, enquanto estavam juntos, Rick e Ilsa fizeram uma viagem de volta ao mundo. Enquanto viajavam, o relacionamento deles evoluiu e, assim, quando voltaram ao mesmo ponto no espaço – a cidade natal deles – o amor de um pelo outro pode ter mudado.

No primeiro caso, temos uma trajetória fechada no tempo (de modo mais exato, no calendário de dia e mês), e, no segundo caso, uma trajetória fechada no espaço. Contudo, as conclusões são similares: um relacionamento pode mudar ao longo de uma trajetória fechada. Os dois cenários ilustram um fenômeno que podemos chamar de monodromia do amor.

Matematicamente, podemos representar o amor de Rick por Ilsa pelo número *x*, e o amor de Ilsa por Rick pelo número *y*. Então, o estado do relacionamento deles, em cada momento, seria representado por um ponto no plano com coordenadas (*x, y*). Por exemplo, o primeiro cenário, no dia em que eles se conheceram, era o ponto (1,0). No entanto, enquanto eles estavam se movendo ao longo da trajetória fechada (em tempo ou espaço), a posição do ponto mudou. Portanto, a evolução do relacionamento deles é representada por uma trajetória no *xy*-plano. A monodromia é simplesmente a diferença entre o ponto inicial e o ponto final dessa trajetória.

Eis um exemplo menos romântico: vamos supor que você suba uma escada espiral e realize um giro completo. No que diz respeito à projeção de sua posição sobre o piso, você percorreu um círculo completo. No entanto, outro atributo – sua altitude – mudou: você se deslocou ao próximo nível. Também é uma monodromia. Podemos vincular isso ao nosso primeiro exemplo, pois o calendário é como uma espiral: 365 dias do ano são como um círculo sobre o piso, e o ano é como a altitude. Portanto, mover-se de uma determinada data, como 14 de março de 2010, para a mesma data um ano depois é semelhante a subir uma escada.

Voltemos à solução de nossa equação diferencial. Uma trajetória fechada no plano é como uma trajetória fechada de sua projeção sobre o piso. O valor da solução é como a altitude de sua posição na escada. Desse ponto de vista, não devia ser uma surpresa que o valor da solução quando realizamos um giro completo fosse diferente do valor inicial.

Considerando a proporção desses dois valores, obtemos a monodromia da solução ao longo dessa trajetória. No fim das contas, podemos interpretar essa monodromia como um elemento do grupo circular.[12] Para ilustrar isso, imagine que você possa curvar um bastão doce para que ele possa assumir a forma de uma rosca. Então, siga a espiral vermelha do bastão. Deslocar-se ao longo do bastão é como seguir uma trajetória fechada em nosso plano, com a espiral sendo a nossa solução. Quando percorremos um círculo completo no bastão, a espiral, em geral, voltará a um ponto diferente daquele no qual começou. Essa diferença é como a monodromia de nossa solução. Corresponde à rotação do bastão doce por meio de algum ângulo.

O cálculo apresentado na nota final 12 mostra que a monodromia ao longo de uma trajetória fechada com o índice +1 é o elemento do grupo circular correspondente à rotação de 360*n* graus (por exemplo, se *n* for 1/6, então, para essa trajetória, atribuiremos a rotação de 360/6 = 60 graus). Da mesma forma, a monodromia ao longo da trajetória com o índice *w* é a rotação de 360*wn* graus.

O resultado dessa discussão é que as monodromias ao longo de distintas trajetórias no plano sem um ponto originam uma representação de seu grupo fundamental no grupo circular.[13] Em um amplo sentido, podemos construir representações do grupo fundamental em relação a qualquer superfície de Riemann (possivelmente, com alguns pontos removidos, como em nosso caso), avaliando a monodromia das equações diferenciais definidas nessa superfície. Essas equações vão ser mais complicadas, mas, localmente, dentro de uma pequena vizinhança de um ponto na superfície, todas parecem similares à monodromia acima. Utilizando a monodromia das soluções de equações até mesmo mais sofisticadas, podemos construir de maneira semelhante representações do grupo fundamental de uma determinada superfície de Riemann nos grupos de Lie diferentes do grupo circular. Por exemplo, podemos construir representações do grupo fundamental no grupo $SO(3)$.

Retornemos ao problema que eu estava enfrentando: começamos com um grupo de Lie *G* e consideramos a álgebra de Kac–Moody correspondente. A conjectura de Drinfeld exigiu a descoberta de uma ligação entre representações dessa álgebra de

Kac–Moody e representações do grupo fundamental no grupo dual de Langlands ^LG.

O primeiro passo é substituir as representações do grupo fundamental pelas equações diferenciais adequadas, cuja monodromia considera valores em ^LG. Isso torna a questão mais algébrica e, portanto, mais próxima do mundo das álgebras de Kac–Moody. Os tipos de equações diferenciais que são relevantes nesse caso foram apresentados anteriormente (de maneira essencial, no caso de um plano sem um ponto, como acima), por Drinfeld e Sokolov, no tempo em que Drinfeld ficou "exilado" em Ufa. Posteriormente, Beilinson e Drinfeld generalizaram esse trabalho para superfícies de Riemann arbitrárias e chamaram as equações diferenciais resultantes de "opers". A palavra "oper" é derivada de "operador", mas também era, em parte, uma brincadeira, pois em russo é uma gíria para policial, como "tira".

Na minha tese, baseada no trabalho que fiz em Moscou com Borya, fui capaz de construir representações da álgebra de Kac–Moody de G parametrizadas por meio de opers correspondentes ao grupo dual de Langlands ^LG. A existência de uma ligação entre os dois era quase milagrosa: de certo modo, a álgebra de Kac–Moody associada com G "sabia" algo a respeito do grupo dual de Langlands ^LG, como Drinfeld previra. Isso fez seu plano funcionar de acordo com o seguinte esquema:[14]

Uma representação do grupo fundamental de X em ^LG $\longrightarrow$ Um oper na superfície de Riemann de X $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ Uma representação da álgebra de Kac-Moody de G $\longrightarrow$ Um feixe automorfo no espaço de módulos de G-fibrados em X

Minha demonstração desse resultado era bastante complicada tecnicamente. Eu fui capaz de explicar *como* o grupo dual de Langlands aparecia, mas, mesmo agora, mais de vinte anos depois, ainda acho misterioso *por que* aparece. Solucionei o problema, mas, em última análise, era pouco satisfatório sentir que algo simplesmente aparecia do nada. Desde então, em parte, minha pesquisa foi motivada pela tentativa de achar uma explicação mais completa.

Frequentemente, acontece dessa maneira. Alguém demonstra um teorema, outros o verificam; novos avanços no campo são feitos com base no novo resultado, mas o entendimento verdadeiro de seu significado pode levar anos ou décadas. Sei que, mesmo se eu não descobrir a resposta, a tocha será passada para novas gerações de matemáticos, que acabarão descobrindo-a. No entanto, é claro que eu mesmo adoraria chegar ao cerne dela.

Posteriormente, Beilinson e Drinfeld utilizaram o teorema de minha tese em sua bela construção da relação de Langlands geométrica (na coluna direita da pedra de Roseta de Weil; veja o diagrama na página 207). Esse trabalho espetacular era o início de um novo capítulo do Programa de Langlands, trazendo diversas novas ideias e *insights* a respeito do assunto e o expandindo ainda mais.

Tempos depois, resumi a pesquisa que fiz nessa área (parte dela em colaboração com Borya e outra com Dennis Gaitsgory) em meu livro *Langlands Correspondence for Loop Groups,* publicado pela Cambridge University Press.[15] Saiu em 2007, exatamente vinte anos depois que escrevi as primeiras fórmulas relativas à realização de campo-livre das álgebras de Kac–Moody, na viagem noturna de trem da datcha de Borya para casa, um cálculo que – eu mal sabia – iniciou minha longa jornada rumo ao Programa de Langlands.

Como epígrafe do meu livro, escolhi estes versos de um poema de E. E. Cummings, um dos meus poetas favoritos, escrito em 1931:

> *Concentric geometries of transparency slightly*
> *joggled sink through algebras of proud*
> *inwardlyness to collide spirally with iron arithmethics…* *

Para mim, parece uma metáfora poética para aquilo que estamos tentando alcançar no Programa de Langlands: uma unidade de geometria, álgebra e aritmética (isto é, teoria dos números). Uma alquimia atual.

O trabalho de Beilinson e Drinfeld resolveu alguns problemas consagrados, mas também suscitou outras perguntas. Eis como é em matemática: cada novo resultado remove o véu que cobre o desconhecido, mas o que então se torna conhecido não contém simplesmente respostas – inclui perguntas que não sabíamos formular, direções que não sabíamos que podíamos explorar. E, assim, cada descoberta nos inspira a dar novos passos e nunca nos deixa satisfeitos em nossa busca por conhecimento.

Em maio de 1991, compareci à cerimónia de formatura em Harvard. Era um momento ainda mais especial para mim, pois um das pessoas que discursaram foi Eduard Shevardnadze, um dos arquitetos da *perestroika,* na União Soviética. Recentemente, ele tinha renunciado ao cargo de ministro das Relações Exteriores, em protesto contra a violência nas repúblicas bálticas, advertindo contra uma ditadura incipiente.

Aqueles eram tempos turbulentos. Não sabíamos de toda a confusão que ainda estava por vir: o golpe de Estado, em agosto daquele ano; o colapso subsequente da União Soviética; a imensa provação que o povo teria de suportar ao longo das reformas econômicas. Nem podíamos prever o mandato controverso de Shevardnadze como presidente da República da Geórgia, sua terra natal. No entanto, naquele dia glorioso, no Harvard Yard iluminado pelo sol, quis dizer "muito obrigado" para o homem que ajudou a me libertar, e a milhões dos meus compatriotas, do regime comunista.

Aproximei-me de Shevardnadze após seu discurso e lhe revelei que tinha acabado de receber meu diploma de doutorado de Harvard, o que não teria sido possível sem a *perestroika.* Ele sorriu e disse, em russo, com seu encantador sotaque georgiano:

– Fico contente em ouvir isso. Desejo-lhe grande sucesso em seu trabalho. – Shevardnadze fez uma pausa e adicionou, como um autêntico georgiano: – E felicidade em sua vida pessoal.

Na manhã seguinte, fui para a Itália. Victor Kac me convidou para uma conferência que ele organizou em Pisa, com Corrado de Concini, seu colega italiano. De Pisa, fui para a ilha da Córsega, para participar de outro encontro, e, em seguida, para uma conferência em Quioto, no Japão. Essas conferências reuniram físicos e matemáticos interessados em álgebras de Kac–Moody e suas aplicações em física quântica. Dei uma palestra a respeito do trabalho que tinha acabado de concluir. Foi a primeira vez que a maioria dos participantes tomou conhecimento do Programa de Langlands, e eles pareceram ficar intrigados. Remontando àqueles dias, fico surpreso de como as coisas mudaram desde então. Atualmente, o Programa de Langlands é considerado um marco da matemática moderna, sendo amplamente conhecido em diversas disciplinas.

Foi a primeira vez que tive a oportunidade de viajar ao redor do mundo. Estava descobrindo culturas diferentes e também percebendo como a matemática, nossa linguagem comum, promove nosso encontro mais próximo. Tudo era novo e excitante; o mundo, um caleidoscópio de infinitas possibilidades.

*Geometrias concêntricas de transparência ligeiramente / estremecida afundam em álgebras de orgulhosa / interioridade colidindo de forma espiral com aritmética de ferro...

Capítulo 16

Dualidade quântica

Vimos o Programa de Langlands reverberar através das câmaras da matemática, incluindo a teoria dos números, as curvas sobre corpos finitos e superfícies de Riemann. Até mesmo representações das álgebras de Kac-Moody entraram no mix. Através das lentes do Programa de Langlands, observamos os mesmos padrões, os mesmos fenômenos nesses diversos campos matemáticos. Manifestam-se de distintas maneiras, mas algumas características comuns (como a aparência do grupo dual de Langlands) sempre podem ser reconhecidas. Elas apontam para uma estrutura subjacente misteriosa – o código-fonte, podemos dizer – de toda a matemática. Nesse sentido, falamos do Programa de Langlands como a Teoria da Grande Unificação da matemática.

Também vimos algumas das noções mais comuns e intuitivas da matemática que estudamos na escola: números, funções, equações – torcidos, deformados e, às vezes, até fragmentados. Muitos provaram não ser tão fundamentais como aparentavam. Na matemática moderna, há conceitos e ideias que são mais profundos e mais versáteis: espaços vetoriais, grupos de simetria, números primos módulo aritmético, feixes. Assim, a matemática tem muito mais do que aparenta, sendo o Programa de Langlands o que nos permite começar a ver aquilo que não podíamos ver antes. Até agora, só fomos capazes de captar vislumbres da realidade oculta. E agora, como arqueólogos diante de um mosaico fraturado, tentamos juntar os pedaços da evidência que fomos capazes de coletar. Cada nova peça do quebra-cabeça nos fornece novos *insights,* novas ferramentas para desvendar o mistério. E cada vez nós nos deslumbramos com a riqueza aparentemente inesgotável da imagem emergente.

Encontrei meu próprio ponto de entrada nesse mundo mágico quando Drinfeld ligou meu trabalho a respeito das álgebras de Kac-Moody com o Programa de Langlands. Esse vasto assunto e sua onipresença na matemática me fascinaram desde então. Senti-me compelido a aprender cada vez mais sobre as diversas pistas do programa que são discutidas neste livro, e, desde então, a maior parte da minha pesquisa foi a respeito do Programa de Langlands ou se inspirou nele de uma forma ou de outra. Isso me forçou a viajar através dos continentes matemáticos, aprendendo diversas culturas e línguas.

Como qualquer viajante, obriguei-me a ficar surpreso com o que vi. E agora chegamos a uma das maiores surpresas: o Programa de Langlands também está ligado inextricavelmente à física quântica. A chave é a dualidade, tanto na física como na matemática.

Pode parecer estranho procurar uma dualidade na física, mas, até certo ponto, esse é um conceito com que todos nós já estamos familiarizados. Consideremos a eletricidade e o magnetismo. Embora essas duas forças pareçam ser muito diferentes, são, na prática, descritas por uma teoria matemática única, denominada eletromagnetismo. Essa teoria possui uma dualidade oculta, que troca forças elétricas e magnéticas (discutiremos isso em detalhes a seguir). Na década de 1970, os físicos tentaram generalizar essa dualidade nas assim chamadas teorias de calibre não abelianas. Essas são as teorias que descrevem as forças nucleares: a força “forte”, que mantém os quarks dentro dos prótons, nêutrons e outras partículas elementares; e a força “fraca”, responsável por coisas como o decaimento radioativo.

No cerne de toda teoria de calibre, há um grupo de Lie, chamado de *grupo de calibre.* De certa forma, o eletromagnetismo envolve a teoria de calibre mais simples, e o grupo de calibre é, nesse caso, nosso velho amigo, ou seja, o grupo circular (o grupo de rotações de qualquer objeto redondo). Esse grupo é abeliano; isto é, a multiplicação de dois elementos quaisquer não depende da ordem em que são considerados: $a \cdot b = b \cdot a$. No entanto, nas teorias das interações forte e fraca, os grupos de calibre correspondentes são não abelianos; isto é, $a \cdot b \neq b \cdot a$, no grupo de calibre. Assim, nós denominamos esses grupos de teorias de calibre não abelianas.

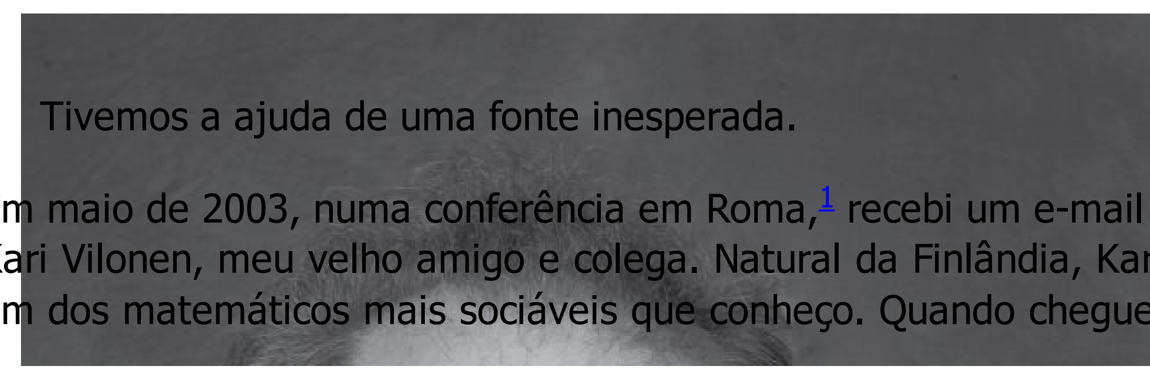
Então, na década de 1970, os físicos descobriram que havia um análogo da dualidade eletromagnética nas teorias de calibre não abelianas, mas por meio de um capricho surpreendente. Constatou-se que, se começarmos com a teoria de calibre cujo grupo de calibre é G, então a teoria dual será a teoria de calibre com outro grupo de calibre. E, pasmem, esse grupo acabou se revelando nada além do grupo dual de Langlands ${}^LG$, que é o elemento-chave do Programa de Langlands!

Pense a respeito disso dessa maneira: a matemática e a física são como dois planetas distintos; por exemplo, Terra e Marte. Na Terra, descobrimos uma relação entre continentes diferentes. Nessa relação, cada pessoa da Europa corresponde a uma na América do Norte; seus pesos, suas alturas e suas idades são os mesmos. No entanto, apresentam sexos opostos (isso é como trocar um grupo de Lie e seu grupo de Lie dual de Langlands). Então, certo dia, recebemos um visitante de Marte, que nos informa que, em seu planeta, eles também descobriram uma relação entre seus continentes. Revela-se que cada marciano, em um dos seus continentes, corresponde a um marciano de outro continente, de modo que suas alturas, seus pesos e suas idades são os mesmos, mas… apresentam sexos opostos (quem sabe os marcianos não tinham dois sexos, exatamente como nós?). Não conseguimos acreditar no que estamos ouvindo: parece que a relação que temos na Terra e a relação que eles têm em Marte estão ligadas de algum modo. Mas por quê?

Da mesma forma, como o grupo dual de Langlands aparece na matemática e na física, é natural assumir que deve haver uma ligação entre o Programa de Langlands da matemática e a dualidade eletromagnética da física. No entanto, durante quase trinta anos, ninguém foi capaz de descobrir essa ligação.

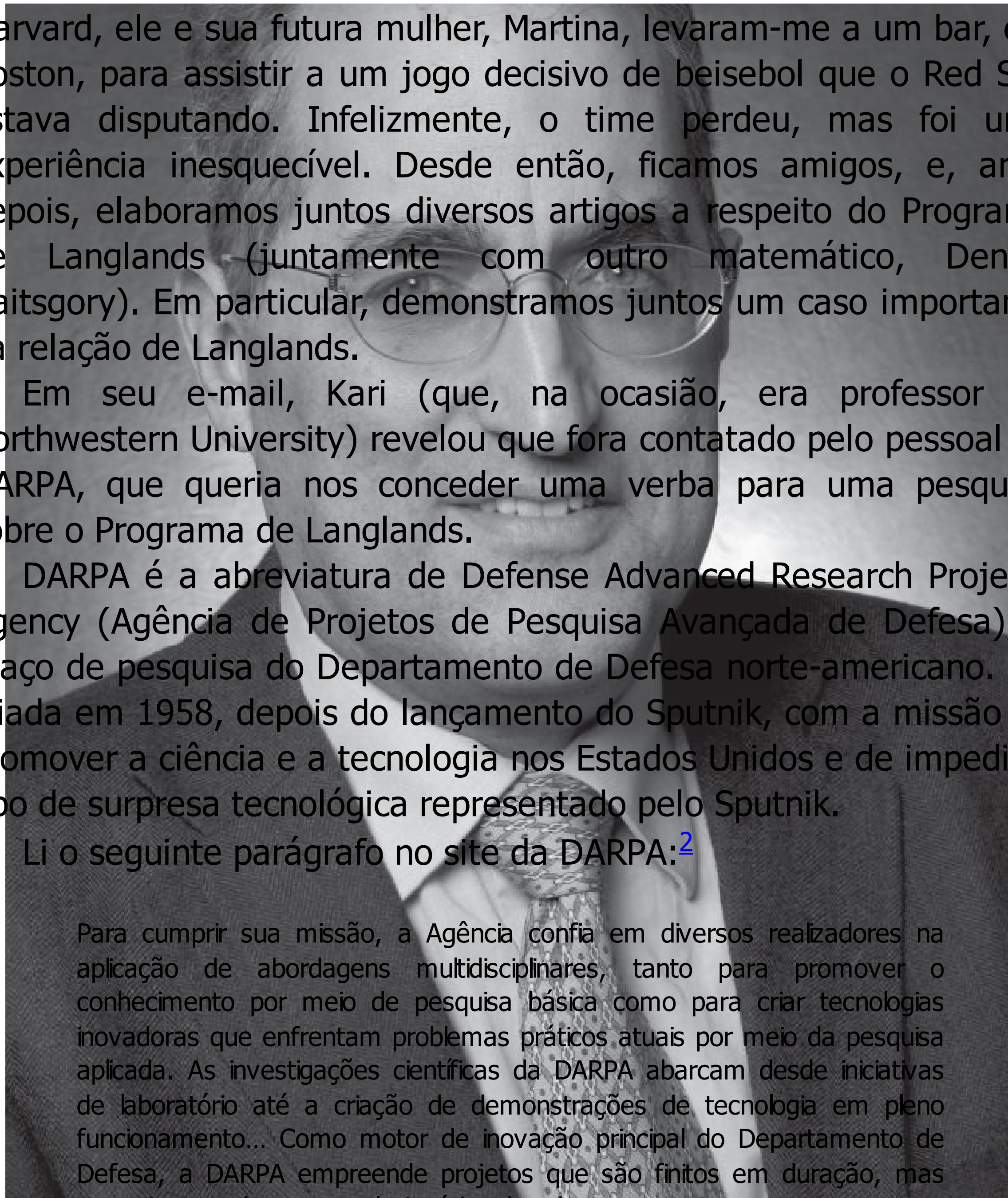
Em diversas ocasiões, ao longo dos anos, discuti essa questão com Edward Witten. Professor do Instituto de Estudos Avançados de Princeton, ele é considerado um dos maiores físicos teóricos vivos. Entre uma de suas incríveis qualidades, destaca-se a capacidade de utilizar os instrumentos mais sofisticados da física quântica para fazer descobertas e conjecturas surpreendentes em matemática pura. O trabalho de Witten inspirou diversas gerações de matemáticos, e ele se tornou o primeiro físico a ganhar a medalha Fields.

Curioso a respeito do vínculo entre as dualidades quânticas e o Programa de Langlands, Witten me fazia perguntas sobre isso de vez em quando. Discutíamos isso em meu escritório em Harvard quando ele vinha para Harvard ou ao MIT, ou em seu escritório em Princeton, quando eu ia para lá. As discussões eram sempre estimulantes, mas nunca chegamos muito longe. Era evidente que alguns elementos essenciais estavam faltando, ainda esperando para serem descobertos.



Tivemos a ajuda de uma fonte inesperada.

Em maio de 2003, numa conferência em Roma,[1] recebi um e-mail de Kari Vilonen, meu velho amigo e colega. Natural da Finlândia, Kari é um dos matemáticos mais sociáveis que conheço. Quando cheguei a



Harvard, ele e sua futura mulher, Martina, levaram-me a um bar, em Boston, para assistir a um jogo decisivo de beisebol que o Red Sox estava disputando. Infelizmente, o time perdeu, mas foi uma experiência inesquecível. Desde então, ficamos amigos, e, anos depois, elaboramos juntos diversos artigos a respeito do Programa de Langlands (juntamente com outro matemático, Dennis Gaitsgory). Em particular, demonstramos juntos um caso importante da relação de Langlands.

Em seu e-mail, Kari (que, na ocasião, era professor da Northwestern University) revelou que fora contatado pelo pessoal da DARPA, que queria nos conceder uma verba para uma pesquisa sobre o Programa de Langlands.

DARPA é a abreviatura de Defense Advanced Research Projects Agency (Agência de Projetos de Pesquisa Avançada de Defesa), o braço de pesquisa do Departamento de Defesa norte-americano. Foi criada em 1958, depois do lançamento do Sputnik, com a missão de promover a ciência e a tecnologia nos Estados Unidos e de impedir o tipo de surpresa tecnológica representado pelo Sputnik.

Li o seguinte parágrafo no site da DARPA:[2]

> Para cumprir sua missão, a Agência confia em diversos realizadores na aplicação de abordagens multidisciplinares, tanto para promover o conhecimento por meio de pesquisa básica como para criar tecnologias inovadoras que enfrentam problemas práticos atuais por meio da pesquisa aplicada. As investigações científicas da DARPA abarcam desde iniciativas de laboratório até a criação de demonstrações de tecnologia em pleno funcionamento… Como motor de inovação principal do Departamento de Defesa, a DARPA empreende projetos que são finitos em duração, mas que criam mudanças revolucionárias duradouras.

Ao longo dos anos, a DARPA financiou diversos projetos de matemática aplicada e ciência da computação; por exemplo, a agência foi responsável pela criação da Arpanet, a precursora da Internet. Mas, até onde eu sei, ela não tinha apoiado projetos de matemática pura. Por que a DARPA iria querer apoiar a pesquisa relativa ao Programa de Langlands?

Essa área parecia ser pura e abstrata, sem aplicações imediatas. No entanto, temos de entender que a pesquisa científica fundamental constitui a base de todo o progresso tecnológico. Muitas vezes, as descobertas aparentemente mais abstratas e abstrusas em matemática e física levam a inovações que utilizamos agora em nosso cotidiano. Pensemos na aritmética módulo números primos. Quando vemos isso pela primeira vez, parece tão abstrato que aparentemente é impossível que algo assim possa ter quaisquer aplicações no mundo real. De fato, G. H. Hardy, matemático inglês, disse de forma memorável que "a maior parte da matemática superior é inútil".[3] Mas ele estava enganado: muitos resultados aparentemente esotéricos da teoria dos números (seu ramo de especialidade) são agora ubíquos, por exemplo, nas operações bancárias on-line. Quando fazemos compras on-line, o módulo aritmético *N* entra em ação (veja a descrição do algoritmo de criptografia RSA na nota 7 do capítulo 14). Nunca devemos tentar prejulgar o potencial de uma fórmula ou ideia matemática em relação a aplicações práticas.

A história mostra que todos os avanços tecnológicos espetaculares foram precedidos, muitas vezes décadas antes, por avanços na pesquisa pura. Portanto, se limitarmos o apoio para a ciência básica, limitaremos nosso progresso e poder.

Também há outro aspecto disso: como sociedade, somos definidos, em grande medida, pela nossa pesquisa e inovação científica. É uma parte importante de nossa cultura e bem-estar. Robert Wilson, primeiro diretor do Fermi National Laboratory, no qual se montou o maior acelerador de partículas de sua época, elaborou a questão em seu testemunho para a comissão mista do congresso sobre energia atómica, em 1969. Indagado se essa máquina caríssima poderia colaborar com a segurança do país, ele afirmou:[4]

> Só do ponto de vista de longo alcance, de uma tecnologia em desenvolvimento. Caso contrário, tem a ver com: somos bons pintores, bons escultores, grandes poetas? Quero dizer, todas as coisas que realmente reverenciamos e estimamos em nosso país e que envolvem patriotismo. Nesse sentido, esse novo conhecimento tem tudo a ver com honra e pátria, mas não tem nada a ver diretamente com a defesa de nosso país, exceto torná-lo digno de defesa.

Anthony Tether, que atuou como diretor da DARPA de 2001 a 2009, reconheceu a importância da pesquisa básica. Ele desafiou seus gerentes de programa a encontrar um bom projeto associado à matemática pura. Um dos gerentes, Doug Cochran, assumiu essa missão com seriedade. Ele tinha um amigo na National Science Foundation (NSF) chamado Ben Mann. Especialista no campo da topologia, Ben tinha deixado um emprego acadêmico e foi para Washington para trabalhar como diretor de programa da Divisão de Ciências Matemáticas da NSF.

Quando Doug pediu a Ben uma sugestão a respeito de um projeto importante em matemática pura, Ben pensou no Programa de Langlands. Embora não fosse sua área de especialidade, ele percebeu sua importância a partir das propostas por verba nessa área apresentadas à NSF. A qualidade dos projetos e o fato de que algumas ideias iguais estivessem disseminadas em diversas disciplinas matemáticas causou grande impressão sobre ele.

Assim, Ben sugeriu para Doug que a DARPA apoiasse a pesquisa associada ao Programa de Langlands. É por isso que Kari, eu e outros dois matemáticos fomos contatados e solicitados a elaborar uma proposta que Doug apresentaria ao diretor da DARPA. A expectativa era de que, se o diretor aprovasse, receberíamos uma verba de muitos milhões de dólares para orientar a pesquisa nessa área.

Com toda a honestidade, hesitamos inicialmente. Era um território desconhecido: nenhum matemático que conhecíamos tinha recebido verbas daquela grandeza antes. Normalmente, os matemáticos recebem verbas individuais relativamente pequenas da

NSF (um pouco de dinheiro para viagens, apoio para um estudante de pós-graduação e talvez apoio para cursos de verão). Nesse caso, teríamos de coordenar o trabalho de dezenas de matemáticos com o objetivo de realizar um esforço conjunto, numa imensa área de pesquisa. Com uma verba tão alta, seríamos alvo de um escrutinio público muito maior e provavelmente de alguma suspeição e inveja dos nossos colegas. Indiscutivelmente seríamos ridicularizados se não houvesse um progresso significativo, e esse fracasso poderia fechar as portas para o financiamento de outros projetos importantes de matemática pura pela DARPA.

Apesar de nossa apreensão, queríamos causar um impacto em relação ao Programa de Langlands. E a ideia de substituir o esquema tradicional e conservador de financiamento da pesquisa matemática por uma grande injeção de recursos numa área promissora parecia atraente e estimulante. Simplesmente não pudemos dizer não.

A questão seguinte era o que devíamos focar em nosso projeto. O Programa de Langlands, como vimos, é multifacetado e pertinente a muitos campos da matemática. Seria muito fácil elaborar meia dúzia de propostas a respeito desse tópico geral. Tínhamos de fazer uma escolha, e decidimos nos concentrar no que achávamos que era o maior mistério: a possível ligação entre o Programa da Langlands e as dualidades na física quântica.

Uma semana depois, Doug apresentou nossa proposta ao diretor da DARPA, e, segundo a opinião geral, foi um sucesso. O diretor aprovou a verba multimilionária para esse projeto, por três anos. Foi, ao que sabemos, a maior verba concedida para pesquisa em matemática pura até hoje. Sem dúvida, as expectativas eram enormes. Foi um momento de grande entusiasmo, mas também de alguma ansiedade.

Felizmente para nós, Ben Mann se transferiu da NSF para a DARPA, para ser o gerente de programa responsável pelo nosso projeto. Desde nossos primeiros encontros com ele, ficou claro que Ben era singularmente qualificado para aquele trabalho. Ele tem a visão e a coragem de assumir um projeto de alto risco e alta recompensa, achar as pessoas certas para implementá-lo e ajudá-las a desenvolver suas ideias ao máximo. E seu entusiasmo contagiante energiza todos ao redor dele. Tivemos realmente muita sorte de termos Ben no comando. Não teríamos sido capazes de alcançar uma fração do que conseguimos sem a orientação e o apoio dele.

Como primeira missão, enviei um e-mail para Edward Witten contandolhe a respeito de nossa verba e lhe perguntando se ele teria interesse em se juntar a nós. Dada a posição única de Witten em física e matemática, tínhamos de tê-lo conosco. Infelizmente, a primeira reação de Witten foi evasiva. Ele nos congratulou pelo recebimento da verba, mas também deixou claro que tinha diversos projetos para cuidar, e não devíamos contar com sua participação.

No entanto, num golpe de sorte, Peter Goddard, um dos físicos que descobriram a dualidade eletromagnética nas teorias de calibre não abelianas, estava prestes a se tornar diretor do Instituto de Estudos Avançados de Princeton. Sua pesquisa mais recente era relacionada com a teoria da representação relativa às álgebras de Kac–Moody, e, por causa disso, eu tinha encontrado Peter em diversas conferências.

Lembro-me particularmente de um desses encontros. Em agosto de 1991, estávamos num grande seminário sobre matemática e física quântica, na Universidade de Quioto, no Japão. No meio do seminário, recebemos uma notícia alarmante sobre um golpe de Estado na União Soviética. Aparentemente, o regime autoritário estava voltando ao poder, e as limitadas liberdades da *perestroika* logo se reduziriam. Isso significava que as fronteiras seriam fechadas novamente e, assim, haveria uma possibilidade muito real de que eu não fosse capaz de ver minha família durante anos. Meus pais me ligaram imediatamente e me disseram que, se isso acontecesse, eu não deveria me preocupar com eles e, em nenhuma hipótese, deveria tentar voltar para a Rússia. Quando nós nos despedimos, estávamos nos preparando para o pior. Nem mesmo tínhamos certeza se conseguiríamos voltar a nos falar pelo telefone num futuro próximo.

Aqueles eram dias turbulentos. Certa noite, eu e Fedya Smirnov, físico e meu bom amigo, estávamos na sala de estar de uma das casas de hóspedes, assistindo à TV japonesa e tentando descobrir o que estava acontecendo em Moscou. Todas as outras pessoas pareciam estar dormindo profundamente. De repente, às três da manhã, aproximadamente, Peter Goddard entrou na sala de estar, com uma garrafa de uísque Glenfiddich na mão. Perguntou-nos sobre as últimas noticias, e todos nós bebemos. Em seguida, ele voltou para a cama, mas insistiu para que ficássemos com a garrafa; um belo gesto de apoio.

No dia seguinte, o golpe de Estado foi derrotado, para o nosso grande alivio. Uma foto minha e de Borya Feigin (que também estava naquela conferência), sorrindo e com os punhos erguidos no ar, acabou na primeira página do *Yomiuri,* um dos principais jornais japoneses.

No meu e-mail para Peter, lembrava-o desse episódio e lhe informava a respeito da verba da DARPA. Sugeri que organizássemos um encontro no Instituto de Estudos Avançados, reunindo físicos e matemáticos para uma palestra a respeito do Programa de Langlands e das dualidades em física, para tentar encontrar um denominador comum, de modo que pudéssemos resolver o enigma juntos.

A resposta de Peter foi a melhor que podíamos esperar. Ele ofereceu apoio total para a organização do encontro.

O instituto era o lugar perfeito para essa reunião. Criado em 1930, com centro independente de pesquisa e pensamento, foi o lar de Albert Einstein (que passou seus últimos vinte anos de vida ali), André Weil, John von Neumann, Kurt Gödel e outros cientistas ilustres. O corpo docente corrente é igualmente impressionante, incluindo o próprio Robert Langlands, que foi professor ali desde 1972 (atualmente emérito), e Edward Witten. Dois outros físicos do corpo docente, Nathan Seiberg e Juan Maldacena, trabalham em áreas intimamente relacionadas com a física quântica, e diversos matemáticos, como Pierre Deligne e Robert MacPherson, realizam pesquisas sobre tópicos ligados ao Programa de Langlands.

Minha troca de e-mails com Goddard resultou em planos para uma reunião exploratória, no início de dezembro de 2003. Ben Mann, Kari Vilonen e eu iríamos para Princeton, e Goddard prometeu participar. Convidamos Witten, Seiberg e MacPherson, outro matemático de Princeton; Mark Goresky, que estava gerenciando o projeto da DARPA comigo e com Kari, também se juntaria a nós (também convidamos Langlands, Maldacena e Deligne, mas eles estavam viajando e não puderam comparecer).

A reunião foi marcada para começar às 11h, na sala de reuniões perto da lanchonete do instituto. Ben, Kari e eu chegamos cedo, cerca de quinze minutos antes do encontro. Não havia mais ninguém ali. Fiquei circulando nervosamente pelo recinto e não conseguia parar de pensar: "Será que Witten vem?" Ele era o único dos convidados que não tinha confirmado sua participação.

Cinco minutos antes da reunião, a porta se abriu. Era Witten! Foi nesse momento que eu soube que algo bom resultaria daquilo tudo.

Alguns minutos depois, os outros participantes chegaram. Sentamos todos ao redor de uma grande mesa. Depois dos cumprimentos habituais e da conversa informal, todos os olhares se voltaram para mim.

– Quero agradecer a todos pela presença – comecei. – Há algum tempo, já se sabe que o Programa de Langlands e a dualidade eletromagnética têm algo em comum. No entanto, o entendimento exato do que acontece nos escapou, apesar de inúmeras tentativas. Acho que chegou a hora de desvendar esse mistério. E agora temos os recursos necessários, pois recebemos uma verba generosa da DARPA como apoio para a pesquisa nessa área.

Na mesa, as pessoas concordaram com um gesto de cabeça. Peter Goddard perguntou:

– Qual é a sua proposta para cuidarmos do assunto?

Antes da reunião, Kari, Ben e eu pensamos em diversos cenários; assim, eu estava bem preparado.

– Sugiro que organizemos um encontro aqui no instituto. Convidaremos físicos que trabalham em áreas afins e organizaremos palestras de matemáticos, para apresentarmos nossa situação atual de conhecimento do Programa de Langlands. Então, discutiremos juntos possíveis ligações com a física quântica.

Então, os olhares se dirigiram para Witten, o mestre da física quântica. Sua reação foi decisiva.

Alto e imponente, Witten projeta grande poder intelectual, a ponto de alguns se sentirem intimidados por ele. Quando fala, suas afirmações são precisas e claras; parecem ser compostas de uma lógica indestrutível. Ele nunca hesita em fazer uma pausa, ponderando sua resposta. Nessas ocasiões, ele frequentemente fecha os olhos e inclina a cabeça para a frente. Foi o que fez naquele momento.

Todos nós ficamos esperando pacientemente. Menos de um minuto deve ter se passado, mas para mim pareceu uma eternidade. Finalmente, Witten afirmou:

– Parece uma boa ideia. Que datas você planeja para o encontro?

Ben, Kari e eu não conseguimos deixar de nos entreolhar. Witten estava do nosso lado, e foi uma grande vitória para nós.

Após uma breve discussão, escolhemos as datas que eram adequadas para todos: de 8 a 10 de março de 2004. Então, alguém perguntou quem seriam os participantes e os palestrantes. Mencionamos alguns nomes e concordamos em finalizar a lista por e-mail e enviar os convites logo. Com isso, a reunião terminou. Não levou mais que quinze minutos.

Obviamente, Ben, Kari e eu ficamos muito contentes. Witten prometeu ajudar a organizar o encontro (o que, claro, seria um grande atrativo para os convidados) e também a participar ativamente dele. Também esperávamos que Langlands participasse, assim como outros físicos e matemáticos do corpo docente do instituto interessados no assunto. Nosso primeiro objetivo fora alcançado.

Nos dias seguintes, finalizamos a lista de participantes, e, uma semana depois, os convites foram enviados. A carta dizia:

> Estamos escrevendo para convidá-lo a participar de um seminário informal sobre o Programa de Langlands e a Física, que será realizado no Instituto de Estudos Avançados, de 8 a 10 de março de 2004. O objetivo desse seminário é apresentar aos físicos os recentes desenvolvimentos do Programa de Langlands geométrico, com a intenção de investigar possíveis ligações entre esse assunto e a teoria quântica de campos. Planejaremos diversas palestras introdutórias de matemáticos, e haverá bastante tempo para discussões informais. Esse seminário tem o apoio de verba da DARPA.

Geralmente, conferências como essa têm de cinquenta a cem participantes. Frequentemente, o que acontece é que os palestrantes dão suas palestras e todos os participantes as escutam educadamente. Alguns participantes podem formular perguntas no fim da palestra, e outros podem se envolver com o palestrante depois. Imaginamos algo completamente diferente: um evento dinâmico, que era mais uma sessão de *brainstorming* do que uma conferência típica. Portanto, planejamos um seminário pequeno, com cerca de vinte pessoas. Esperávamos que esse formato estimulasse mais interação e conversas espontâneas entre os participantes.

Em novembro de 2003, tivemos nosso primeiro encontro nesse formato, na Universidade de Chicago. Houve um pequeno número de matemáticos convidados, incluindo Drinfeld e Beilinson (que tinham ocupado cátedras na Universidade de Chicago alguns anos antes). Esse encontro foi um sucesso e provou para nós que aquele formato funcionava.

Decidimos que Kari, Mark Goresky e eu falaríamos, e também David Ben-Zvi, meu ex-aluno de doutorado, que, na ocasião, era professor na Universidade do Texas, em Austin. Dividimos o material em quatro partes, cada uma apresentada por um de nós. Em nossas apresentações, tínhamos de transmitir as principais ideias do Programa de Langlands para os físicos que não estavam familiarizados com o assunto. Não era uma tarefa fácil.

Preparando-me para a conferência, quis aprender mais a respeito da dualidade eletromagnética. Todos nós estamos familiarizados com as forças elétrica e magnética. A força elétrica é o que faz objetos carregados eletricamente se atraírem ou se repelirem, dependendo se suas cargas são de sinais iguais ou opostos. Por exemplo, um elétron possui carga elétrica negativa, e um próton possui carga positiva (de valor oposto). A força de atração entre eles é o que faz o elétron girar em torno do núcleo do átomo. As forças elétricas criam o que é chamado de campo elétrico. Todos nós vemos essa força em ação durante uma descarga elétrica, que é causada pelo movimento do ar quente e úmido através de um campo elétrico.

A força magnética possui uma origem distinta. É a força criada por ímãs ou pelo movimento de partículas carregadas eletricamente. Um ímã possui dois polos: norte e sul. Ao posicionarmos dois ímãs de polos opostos um diante do outro, eles se atraem; enquanto que, com polos iguais, se repelem. A Terra é um ímã gigante, e tiramos proveito da força magnética que ela exerce quando utilizamos uma bússola. Qualquer ímã cria um campo magnético, como podemos observar claramente na imagem da próxima página.

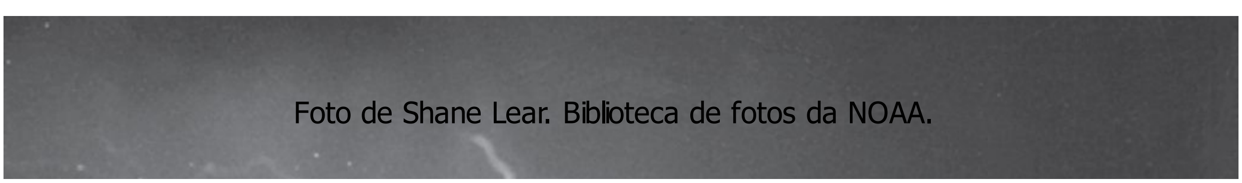
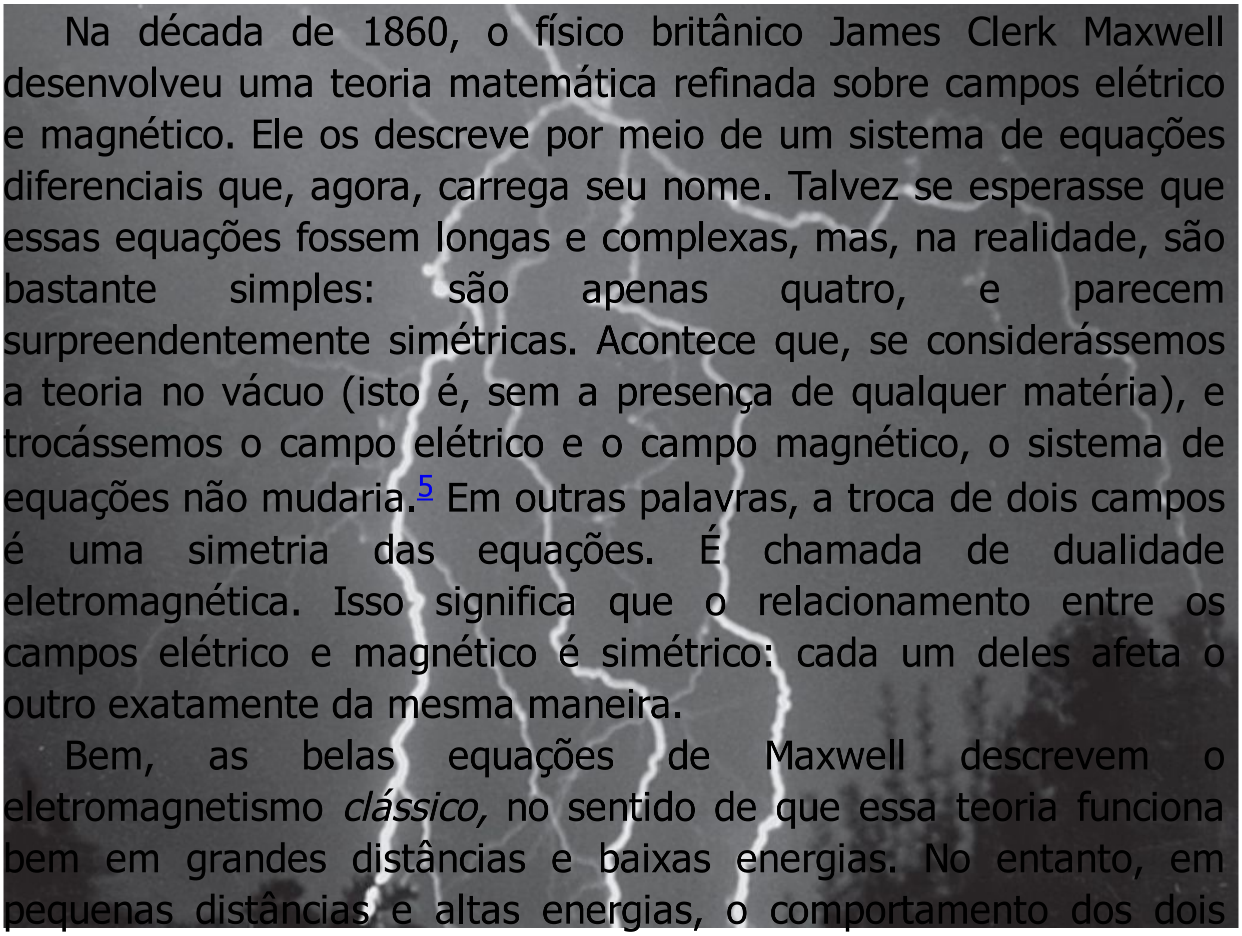


Foto de Shane Lear. Biblioteca de fotos da NOAA.



Na década de 1860, o físico britânico James Clerk Maxwell desenvolveu uma teoria matemática refinada sobre campos elétrico e magnético. Ele os descreve por meio de um sistema de equações diferenciais que, agora, carrega seu nome. Talvez se esperasse que essas equações fossem longas e complexas, mas, na realidade, são bastante simples: são apenas quatro, e parecem surpreendentemente simétricas. Acontece que, se considerássemos a teoria no vácuo (isto é, sem a presença de qualquer matéria), e trocássemos o campo elétrico e o campo magnético, o sistema de equações não mudaria.[5] Em outras palavras, a troca de dois campos é uma simetria das equações. É chamada de dualidade eletromagnética. Isso significa que o relacionamento entre os campos elétrico e magnético é simétrico: cada um deles afeta o outro exatamente da mesma maneira.

Bem, as belas equações de Maxwell descrevem o eletromagnetismo *clássico,* no sentido de que essa teoria funciona bem em grandes distâncias e baixas energias. No entanto, em pequenas distâncias e altas energias, o comportamento dos dois campos é descrito pela teoria *quântica* do eletromagnetismo. Na teoria quântica, esses campos são conduzidos por partículas elementares, os fótons, que interagem com outras partículas. Essa teoria recebe o nome de teoria quântica de campos.

Para evitar confusão, quero enfatizar que o termo “teoria quântica de campos” possui duas conotações distintas: num sentido amplo, significa a linguagem matemática geral que é utilizada para descrever o comportamento e a interação das partículas elementares; mas também pode se referir a um modelo específico desse comportamento; por exemplo, o eletromagnetismo quântico envolve uma teoria quântica de campos, nesse sentido. Na maioria das vezes, empregarei o termo no último sentido.

Nessa teoria (ou modelo), algumas partículas (como elétrons e quarks) são os elementos básicos da matéria, e outras (como fótons) são os condutores das forças. Cada partícula possui diversas características: algumas, familiares, como massa e carga elétrica, e outras, menos familiares, como "spin". Então, uma teoria quântica de campos específica é uma receita para combinar essas características.

Na realidade, a palavra "receita" aponta para uma analogia útil: pense em uma teoria quântica de campos como uma receita culinária. Então, os ingredientes do prato que estamos preparando são os análogos das partículas, e a maneira pela qual os misturamos é como a interação entre as partículas.

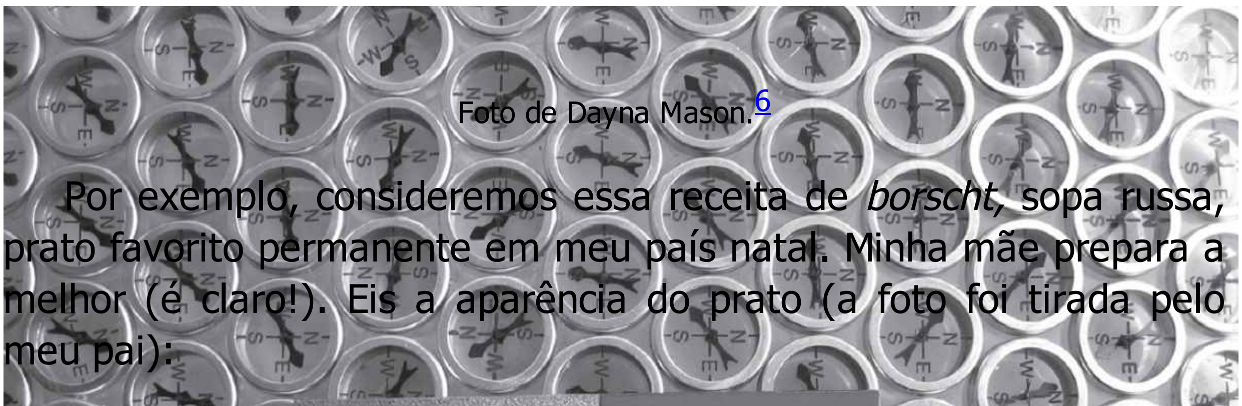
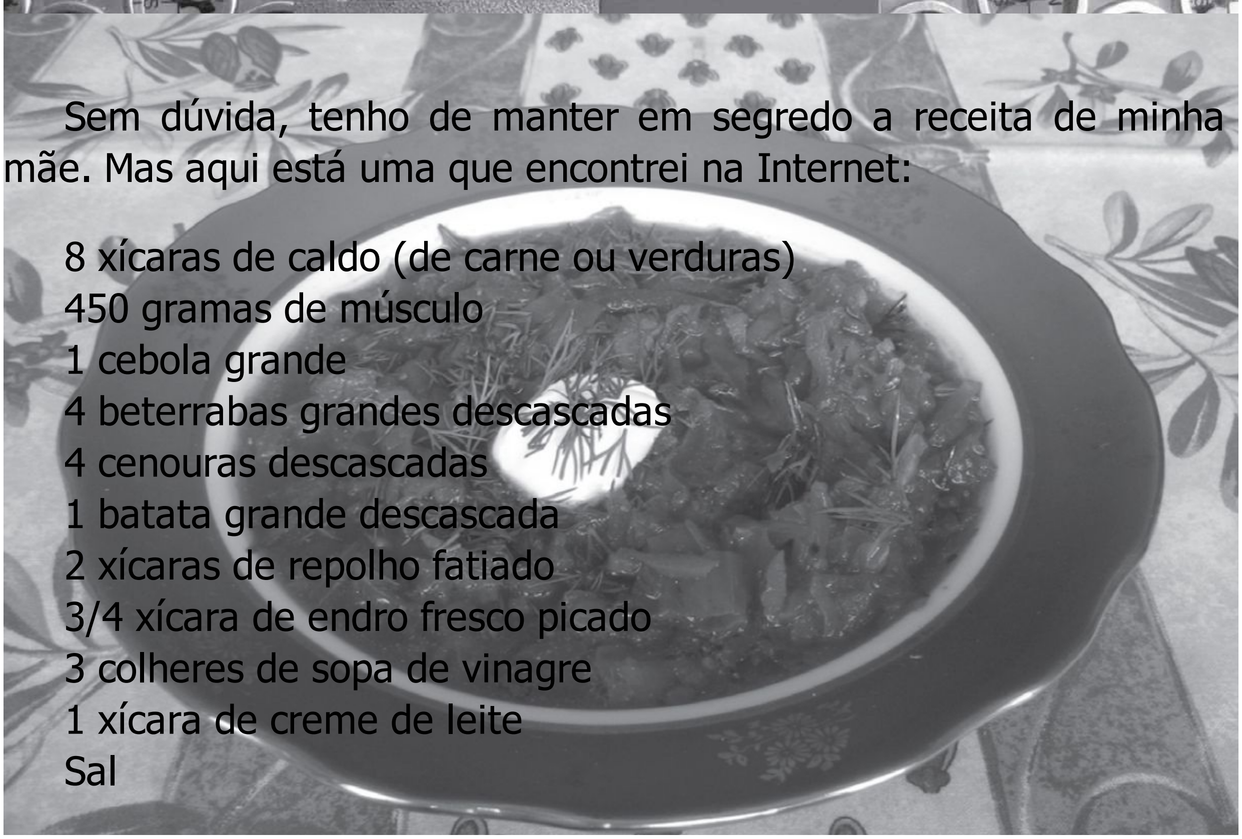


Foto de Dayna Mason.[6]

Por exemplo, consideremos essa receita de *borscht*, sopa russa, prato favorito permanente em meu país natal. Minha mãe prepara a melhor (é claro!). Eis a aparência do prato (a foto foi tirada pelo meu pai):



Sem dúvida, tenho de manter em segredo a receita de minha mãe. Mas aqui está uma que encontrei na Internet:

8 xícaras de caldo (de carne ou verduras)
450 gramas de músculo
1 cebola grande
4 beterrabas grandes descascadas
4 cenouras descascadas
1 batata grande descascada
2 xícaras de repolho fatiado
3/4 xícara de endro fresco picado
3 colheres de sopa de vinagre
1 xícara de creme de leite
Sal

Pense nisso como o "conteúdo de partículas" de nossa teoria quântica de campos. O que a dualidade significaria nesse contexto? Significaria simplesmente trocar alguns dos ingredientes ("partículas") por outros, para que o conteúdo total permanecesse o mesmo.

Eis como essa dualidade pode funcionar:

beterraba $\longrightarrow$ cenoura

Todos os outros ingredientes ficam firmes nessa dualidade; isto é:

cenoura $\longrightarrow$ beterraba

caldo $\longrightarrow$ caldo

músculo traseiro $\longrightarrow$ músculo traseiro

batata $\longrightarrow$ cebola

sal $\longrightarrow$ pimenta

pimenta $\longrightarrow$ sal

e assim por diante.

Como as quantidades de ingredientes que trocamos são iguais, o resultado será a mesma receita! Esse é o significado da dualidade.

Se, por outro lado, trocássemos beterrabas por batatas, teríamos uma receita diferente: uma que teria quatro batatas e apenas uma beterraba. Não a testei, mas acho que teria um gosto horrível.

Com esse exemplo, deveria ficar claro que a simetria de uma receita é uma propriedade rara, a partir da qual podemos aprender algo a respeito do prato. O fato de que podemos trocar beterrabas por cenouras sem afetar o resultado significa que o nosso *borscht* é bem equilibrado em termos desses dois ingredientes.

Voltemos ao eletromagnetismo quântico. Dizer que existe uma dualidade nessa teoria significa que há uma maneira de trocar as partículas de modo que acabamos na mesma teoria. Na dualidade eletromagnética, queremos que todas as "coisas elétricas" se tornem "coisas magnéticas", e vice-versa. Assim, por exemplo, um elétron (um análogo de uma beterraba em nossa sopa) conduz uma carga elétrica e, dessa maneira, deveria ser trocado por uma partícula que conduz uma carga magnética (um análogo de uma cenoura).

A existência dessa partícula contradiz nossa experiência cotidiana: um ímã sempre possui dois polos; e eles não podem ser separados! Se quebrarmos um ímã em dois pedaços, cada um deles também terá dois polos.

Não obstante, a existência de uma partícula elementar magneticamente carregada, denominada monopolo magnético, foi teorizada pelos físicos; o primeiro foi Paul Dirac, um dos criadores da física quântica, em 1931. Ele demonstrou que, se deixarmos algo inesperado ocorrer no campo magnético, na posição do monopolo (isso é o que um matemático chamaria de "singularidade" do campo magnético), então conduzirá carga magnética.

Infelizmente, os monopolos magnéticos não foram descobertos experimentalmente; assim, ainda não sabemos se eles existem na natureza. Se não existirem, então uma dualidade eletromagnética exata não existirá na natureza, ao nível quântico.

Se esse é o caso ou não, é uma questão que ainda está em aberto. Independentemente disso, no entanto, podemos tentar construir uma teoria quântica de campos que seja bastante próxima da natureza e exiba a dualidade eletromagnética. Voltando para nossa analogia de cozinha, podemos tentar "inventar" novas teorias que possuem dualidades. Podemos mudar os ingredientes e suas quantidades nas receitas que conhecemos, livrar-nos de alguns deles, acrescentar algo extra etc. Esse tipo de "cozinha experimental" pode levar a resultados variáveis. Podemos não necessariamente querer "comer" esses pratos imaginados. Mas, comíveis ou não, pode valer a pena estudar suas propriedades em nossa cozinha idealizada – podem nos dar algumas pistas a respeito de pratos que são comíveis (quer dizer, os modelos que podem descrever nosso universo).

Essa "construção de modelo" por tentativa e erro é o caminho pelo qual o progresso em física quântica ocorreu durante décadas (da mesma forma que na arte culinária). E a simetria é um princípio orientador eficiente, que foi utilizado na criação desses modelos. Quanto mais simétrico for um modelo, mais fácil será analisá-lo.

Agora, é importante notar que existem dois tipos de partículas elementares: férmions e bósons. Os primeiros são os elementos básicos da matéria (elétrons, quarks etc.), e os últimos são as partículas que conduzem forças (como os fótons). A elusiva partícula de Higgs, descoberta recentemente no Grande Colisor de Hádrons, em Genebra, também é um bóson.

Há uma diferença fundamental entre os dois tipos de partículas: dois férmions não podem estar no mesmo "estado" simultaneamente, enquanto qualquer número de bósons pode. Como o comportamento deles é tão radicalmente diferente, os físicos, durante muito tempo, supuseram que qualquer simetria de uma teoria quântica de campos tinha de preservar uma distinção entre os setores fermiônicos e bosônicos – essa natureza os impede de se misturarem. No entanto, em meados dos anos 1970, diversos físicos sugeriram uma ideia aparentemente estapafúrdia: um novo tipo de simetria era possível, e ela trocaria bósons por férmions. Foi batizada com o nome de *supersimetria.*

Como Niels Bohr, um dos criadores da mecânica quântica, disse para Wolfgang Pauli de forma memorável: "Todos nós concordamos que sua teoria é absurda. A questão que nos divide é se é bastante absurda para ter uma chance de estar correta."

No caso da supersimetria, ainda não sabemos se ela se materializa na natureza, mas a ideia se tornou aceita. O motivo é que muitos dos problemas que assolam as teorias quânticas de campos convencionais são eliminados quando se introduz a supersimetria. Em geral, as teorias supersimétricas são mais elegantes e mais fáceis de analisar.

O eletromagnetismo quântico não é supersimétrico, mas possui extensões supersimétricas. Inserimos mais partículas, tanto bósons quanto férmions, para que a teoria resultante exiba supersimetria.

Em particular, os físicos estudaram a extensão do eletromagnetismo com a quantidade máxima possível de supersimetria. E eles demonstraram que, na teoria estendida, a dualidade eletromagnética é alcançada.

Em resumo, não sabemos se uma forma de dualidade quântica eletromagnética existe no mundo real. No entanto, sabemos que, numa extensão idealizada e supersimétrica da teoria, a dualidade eletromagnética se manifesta.

Há um aspecto importante dessa dualidade que ainda não discutimos. A teoria quântica de campos em relação ao eletromagnetismo possui um parâmetro: a carga elétrica do elétron. É negativa e, assim, a anotamos como $-e$, onde $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ coulombs. É muito pequena. A extensão supersimétrica máxima relativa ao eletromagnetismo possui um parâmetro similar, que também denotaremos por e. Se executarmos a dualidade eletromagnética e trocarmos todas as coisas elétricas por todas as magnéticas, obteremos uma teoria em que a carga do elétron não será e, mas sim seu inverso, $1/e$.

Se e for pequena, então $1/e$ será grande. Assim, se começarmos com a teoria com uma carga pequena de elétron (como é o caso em nosso mundo), então a teoria dual terá uma grande carga de elétron.

Isso é bastante surpreendente! Em termos da analogia da sopa, imagine que e seja a temperatura da sopa. Então, a dualidade significaria que trocar os ingredientes como cenouras e beterrabas converteria repentinamente um *borscht* frio em um quente.

Essa inversão de e é, de fato, um aspecto básico da dualidade eletromagnética, que apresenta consequências de longo alcance. Da maneira pela qual a teoria quântica de campos é estabelecida, temos um bom manejo apenas para valores pequenos do parâmetro, como por exemplo e. *A priori,* nem mesmo sabemos se a teoria faz sentido com valores grandes do parâmetro. A dualidade eletromagnética não nos diz somente que faz sentido, mas que é, de fato, equivalente à teoria com valores pequenos do parâmetro. Isso significa que temos uma chance de descrever a teoria de todos os valores do parâmetro. É por isso que esse tipo de dualidade é considerado o Santo Graal da física quântica.

Nossa próxima questão é se a dualidade eletromagnética existe para teorias quânticas de campos diferentes em relação ao eletromagnetismo e a sua extensão supersimétrica.

Além das forças elétrica e magnética, existem outras três forças conhecidas da natureza: gravidade, que todos nós conhecemos e apreciamos, e as duas forças nucleares com nomes bastante triviais: forte e fraca. A força nuclear forte mantém quarks dentro de partículas elementares como prótons e nêutrons. A força nuclear fraca é responsável por diversos processos que transformam os átomos e as partículas elementares, como o assim chamado decaimento beta de átomos (emissão de elétrons ou neutrinos) e a fusão de hidrogênio, que fornece energia para as estrelas.

Essas forças parecem ser bastante distintas. Porém, constata-se que as teorias do eletromagnetismo e das forças fraca e forte têm algo em comum: são o que chamamos de teorias de calibre, ou teorias de Yang–Mills, em homenagem aos físicos Chen Ning Yang e Robert Mills, que elaboraram um artigo pioneiro a respeito dessas teorias, em 1954. Como mencionei no início deste capítulo, a teoria de calibre possui um grupo de simetria, denominado grupo de calibre. É um grupo de Lie, conceito que discutimos no capítulo 10. O grupo de calibre da teoria do eletromagnetismo é o grupo que apresentei logo no começo deste livro: o grupo circular (também conhecido como $SO(2)$ ou $U(1)$). É o grupo de Lie mais simples e é abeliano. Já sabemos que muitos grupos de Lie são não abelianos, como o grupo $SO(3)$ de rotações da esfera. A ideia de Yang e Mills foi desenvolver uma generalização do eletromagnetismo, em que o grupo circular seria substituído por um grupo não abeliano. Revelou-se que as teorias de calibre com grupos de calibre não abelianos descrevem perfeitamente as forças nucleares fraca e forte.

O grupo de calibre relativo à teoria da força fraca é o grupo denominando *SU*(2). É o grupo dual de Langlands referente ao *SO*(3), tendo o dobro de tamanho (discutimos isso no capítulo 15). O grupo de calibre relativo à força nuclear forte é denominado *SU*(3).[7]

Assim, as teorias de calibre fornecem um formalismo universal, descrevendo três das quatro forças fundamentais da natureza (calculamos as forças elétrica e magnética como partes da força única do eletromagnetismo). Além disso, nos anos subsequentes, constatou-se que essas não são três teorias distintas, mas sim partes de um todo: há uma única teoria, geralmente chamada de Modelo Padrão, que inclui as três forças como peças distintas. Portanto, é algo que podemos chamar de "teoria unificada" – aquilo que Einstein procurou em vão nos últimos trinta anos de sua vida (ainda que, naquela época, apenas duas forças fossem conhecidas: eletromagnetismo e gravidade).

Já discutimos detalhadamente a importância da ideia de unificação na matemática. Por exemplo, o Programa de Langlands é uma teoria unificada, no sentido de que descreve uma ampla variedade de fenômenos, em disciplinas matemáticas distintas, em termos similares. A ideia de desenvolver uma teoria unificada a partir de alguns princípios fundamentais é especialmente atraente na física, e o motivo é claro. Gostaríamos de alcançar o entendimento mais completo dos mecanismos internos do universo e esperamos que a teoria última – se existir – seja simples e elegante.

Uma teoria simples e elegante não significa uma teoria fácil. Por exemplo, as equações de Maxwell são profundas e exigem algum esforço para se entender o que significam. No entanto, são simples no sentido de que são mais econômicas em expressar a verdade a respeito das forças elétrica e magnética. Também são elegantes, assim como as equações de Einstein em relação à gravidade e as equações da teoria de calibre não abeliana descobertas por Yang e

Mills. Uma teoria unificada deve combinar todas elas, como uma sinfonia harmonizando os sons de todos os instrumentos.

O Modelo Padrão é um passo nessa direção, e sua confirmação experimental (incluindo a recente descoberta do bóson de Higgs) representou um triunfo. No entanto, não é a teoria última do universo: por exemplo, não inclui a força da gravidade, que provou ser a mais elusiva. A teoria da relatividade geral de Einstein oferece um bom entendimento da gravidade de forma clássica, ou seja, em grandes distâncias, mas ainda não temos uma teoria quântica experimentalmente examinável que descreveria a força da gravidade em distâncias muito curtas. Mesmo se focarmos as outras três forças da natureza, o Modelo Padrão ainda deixa muitas perguntas sem resposta e não explica o grande bloco de matéria observado pelos astrônomos (denominado "matéria escura"). Portanto, o Modelo Padrão não é mais que um rascunho parcial da sinfonia suprema.

Uma coisa é certa: a partitura final da sinfonia suprema será escrita na linguagem da matemática. De fato, depois que Yang e Mills escreveram seu célebre artigo apresentando as teorias de calibre não abelianas, os físicos perceberam, para sua grande surpresa, que o formalismo matemático necessário para essas teorias fora desenvolvido pelos matemáticos algumas décadas antes, sem qualquer referência à física. Yang, que acabou ganhando o Prêmio Nobel, descreveu seu assombro nestes termos:[8]

> Não foi só alegria. Foi algo maior, mais profundo: afinal, o que podia ser mais misterioso, o que podia ser mais impressionante do que descobrir que a estrutura do mundo físico está intimamente ligada aos conceitos matemáticos profundos, conceitos que foram desenvolvidos como resultado das considerações enraizadas somente na lógica e na beleza da forma?

Einstein manifestou a mesma sensação de espanto quando perguntou:[9] "Como é possível que a matemática, sendo um produto do pensamento humano, independente da experiência, seja tão admiravelmente apropriada para os objetos da realidade?” Os conceitos que Yang e Mills empregaram para descrever as forças da natureza apareceram antes na matemática porque também eram naturais dentro do paradigma da geometria que os matemáticos estavam desenvolvendo na sequência da lógica interna daquele assunto. Esse é um grande exemplo do que outro prêmio Nobel, o físico Eugene Wigner, chamou de “eficácia absurda da matemática nas ciências naturais”.[10] Embora os cientistas investigassem essa “eficácia” há séculos, suas raízes ainda são entendidas de forma deficiente. As verdades matemáticas parecem existir de maneira objetiva e independente em relação ao mundo físico e ao cérebro humano. Não resta dúvida de que as ligações entre o mundo das ideias matemáticas, da realidade física e da consciência são profundas e precisam ser mais investigadas (no capítulo 18, discutiremos mais essa questão).

Também precisamos de novas ideias para ir além do Modelo Padrão. Uma ideia assim é a supersimetria. Se ela está presente em nosso universo é objeto de grande discussão. Até agora, nenhum vestígio foi descoberto. A experiência é o juiz último de uma teoria; assim, até ser demonstrada experimentalmente, a supersimetria permanece uma construção teórica, independentemente de quão bela e sedutora a ideia possa ser. No entanto, mesmo que não se torne concreta no mundo real, a supersimetria proporciona um instrumento matemático conveniente, que podemos utilizar para construir novos modelos de física quântica. Esses modelos não estão tão distantes dos modelos que regem a física do mundo real, mas, frequentemente, são muito mais fáceis de analisar, por causa do maior grau de simetria que exibem. Esperamos que aquilo que aprendemos a respeito dessas teorias tenha suporte nas teorias realistas do nosso universo, independentemente de a supersimetria existir nele ou não.

Exatamente como a teoria do eletromagnetismo possui uma extensão supersimétrica máxima, as teorias de calibre não abelianas também possuem. Essas teorias supersimétricas são obtidas inserindo mais partículas na mistura, tanto bósons quanto férmions, para alcançar o equilíbrio mais perfeito possível entre elas. Então, é natural perguntar: essas teorias possuem um análogo relativo à dualidade eletromagnética?

No final dos anos 1970, os físicos Claus Montonen e David Olive enfrentaram essa questão.[11] Com base no trabalho anterior[12] de Peter Goddard (futuro diretor do Instituto de Estudos Avançados), Jean Nuyts e David Olive, eles apresentaram uma conclusão surpreendente: sim, há uma dualidade eletromagnética nas teorias de calibre não abelianas supersimétricas, mas essas teorias não são autoduais em geral, da forma que o eletromagnetismo é. Como discutimos acima, se substituirmos todas as coisas elétricas pelas magnéticas, e vice-versa, no eletromagnetismo, voltaremos para a mesma teoria, com a carga invertida do elétron. No entanto, constata-se que, se fizermos a mesma coisa na teoria de calibre supersimétrica geral, com um grupo de calibre G, obteremos uma teoria *diferente.* Ainda será a teoria de calibre, mas com um grupo de calibre diferente (e também com o parâmetro invertido, que é o análogo da carga do elétron).

E qual será o grupo de calibre na teoria dual? Será o ^{L}G, isto é, o grupo dual de Langlands do grupo G.

Goddard, Nuyts e Olive descobriram isso realizando uma análise detalhada das cargas elétrica e magnética, na teoria de calibre com um grupo de calibre G. No eletromagnetismo, que é a teoria de calibre com o grupo de calibre sendo o grupo circular, os valores das duas cargas são números inteiros. Quando os trocamos, um conjunto de números inteiros é trocado por outro conjunto de números inteiros. Portanto, a teoria permanece a mesma. No entanto, eles demonstraram que, numa teoria de calibre geral, as cargas elétrica e magnética assumem valores em dois conjuntos distintos. Vamos chamá-los de S_e e S_m. Eles podem ser expressos matematicamente em termos do grupo de calibre G (agora não é importante como).[13]

Constata-se que, na dualidade eletromagnética, S_e se torna S_m e S_m se torna S_e. Assim, a questão é se há outro grupo G' em que S_e é o que S_m era para G e S_m é o que S_e era para G (isso também deve ser compatível com alguns dados adicionais determinados por G e G'). Não é evidente se esse grupo G' existe, mas eles demonstraram que sim e apresentaram uma construção. Na ocasião, não sabiam que G' já fora construído por Langlands uma década antes, quase da mesma maneira, embora sua motivação fosse totalmente diferente. O grupo G' não é nada além do grupo dual de Langlands ${}^LG$.

Por que a dualidade eletromagnética leva ao mesmo grupo dual de Langlands que os matemáticos descobriram num contexto totalmente diferente era a grande questão que iríamos enfrentar no encontro em Princeton.

Capítulo 17

Revelando as ligações ocultas

A uma distância de cerca de uma hora de trem de Nova York, Princeton parece uma típica cidadezinha da região nordeste dos Estados Unidos. O Instituto de Estudos Avançados, conhecido pela comunidade científica simplesmente como "*o* instituto", fica nos arredores de Princeton, no meio de um bosque. A área ao redor dele é silenciosa e pitoresca: patos nadando em lagoas, árvores refletidas nas águas plácidas. O instituto, um agrupamento de edifícios de tijolo de dois e três andares com ares dos anos 1950, irradia poder intelectual. Ninguém pode deixar de saborear sua rica história, perambulando pelos corredores silenciosos e pela biblioteca principal, que foi usada por Einstein e outros gigantes.

Esse é o lugar onde nosso encontro se realizou, em março de 2004. Apesar do curto prazo, a resposta aos convites que enviamos em dezembro foi bastante positiva. Eram cerca de vinte participantes; assim, quando abrimos o encontro, pedi para todos se apresentarem. Tive vontade de me beliscar: Witten e Langlands estavam ali, sentados próximos, além de Peter Goddard, assim como muitos dos seus colegas da Escola de Matemática e da Escola de Ciências Naturais. David Olive, dos artigos de Montonen–Olive e de

Goddard-Nuyts-Olive, também estava presente. E, é claro, Ben Mann estava conosco.

Tudo correu de acordo com os planos. Basicamente, relatamos a história que você está lendo neste livro: as origens do Programa de Langlands na teoria dos números e na análise harmônica, a passagem para as curvas sobre corpos finitos e, em seguida, as superfícies de Riemann. Também passamos bastante tempo explicando a construção de Beilinson–Drinfeld e meu trabalho com Feigin a respeito das álgebras de Kac–Moody, além de suas ligações com as teorias quânticas de campos bidimensionais.

Ao contrário do que acontece em uma conferência típica, houve bastante troca de ideias entre os palestrantes e a plateia. Foi um encontro intenso, com discussões ininterruptas, tanto na sala do seminário como na lanchonete.

Durante todo o tempo, Witten apresentou grande atividade. Sentado na primeira fila, ele escutava atentamente e formulava perguntas, ocupando constantemente os palestrantes. Na manhã do terceiro dia, disse para mim:

– Gostaria de falar à tarde. Acho que tenho uma ideia do que está acontecendo.

Depois do almoço, Witten descreveu uma possível ligação entre os dois assuntos. Era o início de uma nova teoria ligando matemática e física que ele e seus colaboradores, e, em seguida, muitos outros, vêm procurando desde então.

Como discutimos, na terceira coluna da pedra de Roseta de André Weil, a versão geométrica do Programa de Langlands gira em torno das superfícies de Riemann. Todas são bidimensionais. Por exemplo, como discutimos no capítulo 10, a esfera – a superfície de Riemann mais simples – possui duas coordenadas: latitude e longitude. Por isso, é bidimensional. Todas as outras superfícies de Riemann são bidimensionais também, porque uma pequena vizinhança de cada ponto parece uma porção de um plano bidimensional; assim, pode ser descrita por meio de duas coordenadas independentes.

Por outro lado, as teorias de calibre, em que a dualidade eletromagnética é observada, são definidas no espaço-tempo quadridimensional. Para ligar ambas, Witten começou aplicando a “redução dimensional” de uma teoria de calibre quadridimensional de quatro para duas dimensões.

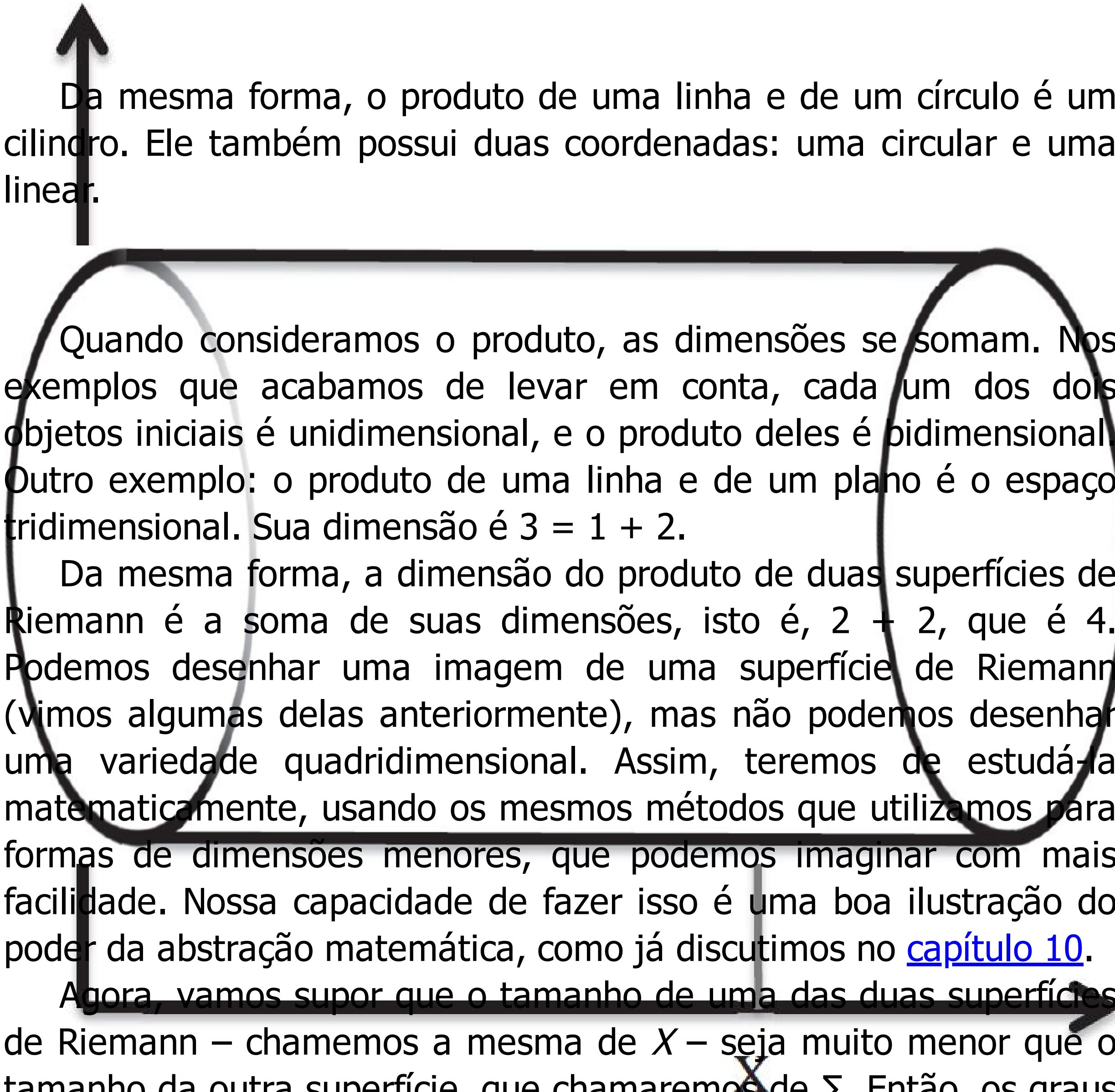
Realmente, na física, a redução dimensional é uma ferramenta-padrão: aproximamos um determinado modelo físico enfocando alguns graus de liberdade e, ao mesmo tempo, ignorando outros. Por exemplo, suponha que você está voando em um avião, e um comissário de bordo, parado no corredor, entrega-lhe um copo de água. Para simplificar, assuma que o movimento da mão do comissário é perpendicular ao movimento do avião. A velocidade do copo tem dois componentes: o primeiro é a velocidade do avião, e o segundo é a velocidade da mão do comissário, entregando-lhe o copo. No entanto, a primeira é muito maior que a segunda; assim, se formos descrever o movimento do copo no ar, do ponto de vista de um observador estático em terra, poderemos ignorar seguramente o segundo componente de velocidade e dizer simplesmente que o copo está se movendo na mesma velocidade do avião. Portanto, podemos reduzir um problema bidimensional, envolvendo dois componentes de velocidade, a um problema unidimensional, envolvendo o componente dominante.

Em nosso contexto, a redução dimensional é realizada da seguinte maneira: consideramos uma forma geométrica (ou variedade), que é produto de duas superfícies de Riemann. Nesse caso, “produto” significa que consideramos uma nova forma geométrica, cujas coordenadas são as coordenadas de cada uma dessas superfícies, consideradas em conjunto.

Como um exemplo mais simples, consideremos o produto de duas linhas. Cada linha possui uma coordenada e, assim, o produto terá duas coordenadas independentes. Portanto, será um plano:

cada ponto nele é representado por um par de coordenadas. Estas são as coordenadas das duas linhas, consideradas em conjunto.

Da mesma forma, o produto de uma linha e de um círculo é um cilindro. Ele também possui duas coordenadas: uma circular e uma linear.



Quando consideramos o produto, as dimensões se somam. Nos exemplos que acabamos de levar em conta, cada um dos dois objetos iniciais é unidimensional, e o produto deles é bidimensional. Outro exemplo: o produto de uma linha e de um plano é o espaço tridimensional. Sua dimensão é 3 = 1 + 2.

Da mesma forma, a dimensão do produto de duas superfícies de Riemann é a soma de suas dimensões, isto é, 2 + 2, que é 4. Podemos desenhar uma imagem de uma superfície de Riemann (vimos algumas delas anteriormente), mas não podemos desenhar uma variedade quadridimensional. Assim, teremos de estudá-la matematicamente, usando os mesmos métodos que utilizamos para formas de dimensões menores, que podemos imaginar com mais facilidade. Nossa capacidade de fazer isso é uma boa ilustração do poder da abstração matemática, como já discutimos no capítulo 10.

Agora, vamos supor que o tamanho de uma das duas superfícies de Riemann – chamemos a mesma de *X* – seja muito menor que o tamanho da outra superfície, que chamaremos de ∑. Então, os graus efetivos de liberdade se concentrarão em ∑ e seremos capazes de descrever aproximadamente a teoria quadridimensional relativa ao produto de duas superfícies por meio de uma teoria em ∑, à qual os físicos se referem como “teoria efetiva”. Logo, ela será bidimensional. Essa aproximação se tornará cada vez melhor conforme redimensionamos *X* para tornar seu tamanho menor, embora preservando sua forma (note que essa teoria efetiva ainda dependerá da forma de X). Portanto, passamos da teoria de calibre supersimétrica quadridimensional relativa ao produto de X e Σ para uma teoria bidimensional definida em Σ.

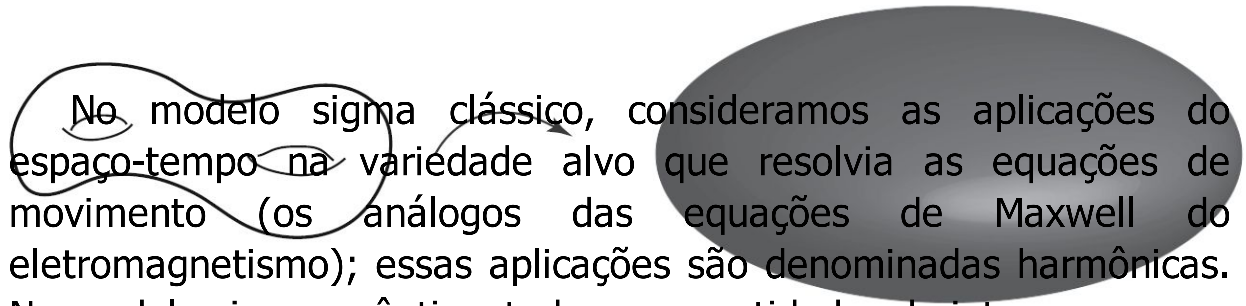
Antes de discutirmos a natureza dessa teoria com mais detalhes, falemos sobre o que queremos dizer com a teoria quântica de campos em geral. Por exemplo, no eletromagnetismo, estudamos os campos elétrico e magnético no espaço tridimensional. Cada um é aquilo que os matemáticos chamam de espaço vetorial. Uma analogia útil é com o campo vetorial que descreve um padrão de vento: em cada ponto do espaço, o vento sopra numa direção específica e possui uma força específica – e isso é captado por um segmento de reta orientado que está ligado a esse ponto, chamado pelos matemáticos de vetor. A coleção desses vetores que estão ligados a todos os pontos do espaço é um campo vetorial. Todos nós já vimos o vento representado como um campo vetorial nos mapas meteorológicos.

Da mesma forma, um determinando campo magnético possui uma direção e uma força específicas em cada ponto do espaço, como podemos ver na figura da página 230. Portanto, também é um campo vetorial. Em outras palavras, temos uma regra que atribui um vetor a cada ponto de nosso espaço tridimensional. Os matemáticos chamam essa regra de uma "aplicação" de nosso espaço tridimensional relativo ao espaço vetorial tridimensional. E, se acompanharmos como um determinando campo magnético muda com o tempo, obteremos uma aplicação do espaço-tempo quadridimensional relativo ao espaço vetorial tridimensional (é como observar na TV a maneira pela qual o mapa meteorológico muda ao longo do tempo). Da mesma forma, qualquer campo elétrico que muda com o tempo também pode ser descrito como uma aplicação do espaço-tempo quadridimensional relativo ao espaço vetorial tridimensional. O eletromagnetismo é uma teoria matemática que descreve essas duas aplicações.

Na teoria clássica do eletromagnetismo, as únicas aplicações em que estamos interessados são as aplicações correspondentes às soluções das equações de Maxwell. Em contraste, na teoria quântica, estudamos *todos* as aplicações. De fato, qualquer cálculo na teoria quântica de campos envolve a somatória de todos as aplicações possíveis, mas cada aplicações é ponderada, isto é, multiplicado por um fator prescrito. Esses fatores são definidos de maneira que as aplicações correspondentes às soluções das equações de Maxwell realizem a contribuição dominante, mas outros também colaboram.

As aplicações do espaço-tempo em diversos espaços vetoriais aparecem em muitas outras teorias quânticas de campos (por exemplo, nas teorias de calibre não abelianas). No entanto, nem todas as teorias quânticas de campos recorrem a vetores. Há uma classe de teorias quânticas de campos, denominada *modelo sigma,* em que consideramos aplicações do espaço-tempo numa forma geométrica ou variedade curvada. Essa variedade é chamada de variedade alvo. Por exemplo, pode ser uma esfera. Embora os modelos sigma fossem estudados inicialmente no caso do espaço-tempo quadridimensional, esse modelo também faz sentido se considerarmos que o espaço-tempo seja uma variedade de qualquer dimensão. Portanto, há um modelo sigma para qualquer alternativa de variedade alvo e para qualquer alternativa de variedade de espaço-tempo. Por exemplo, podemos escolher uma superfície de Riemann bidimensional como nosso espaço-tempo e o grupo de Lie $SO(3)$ como variedade alvo. Então, o modelo sigma correspondente descreverá aplicações dessa superfície de Riemann referente em $SO(3)$.

A figura abaixo ilustra essa aplicação: do lado esquerdo, temos uma superfície de Riemann, do lado direito, a variedade alvo, e a seta representa um mapa entre elas, isto é, uma regra que atribui um ponto na variedade alvo para cada ponto na superfície de Riemann.



No modelo sigma clássico, consideramos as aplicações do espaço-tempo na variedade alvo que resolvia as equações de movimento (os análogos das equações de Maxwell do eletromagnetismo); essas aplicações são denominadas harmônicas. No modelo sigma quântico, todas as quantidades de interesse, como as assim chamadas funções de correlação, são calculadas somando todos as aplicações possíveis, com cada aplicação ponderado; isto é, multiplicado por um fato prescrito.

Voltemos à nossa questão: que teoria quântica de campos bidimensional descreve a redução dimensional de uma teoria de calibre supersimétrica quadridimensional, com o grupo de calibre G em ∑ x *X,* quando redimensionamos *X* para que seu tamanho se torne muito pequeno? No fim das contas, essa teoria é uma extensão supersimétrica do modelo sigma das aplicações de ∑ na variedade alvo específica *M,* que é determinada pela superfície de Riemann *X* e o grupo de calibre G da teoria de calibre original. Nossa notação deve refletir isso. Assim, denotaremos por *M*(*X*, *G*).[1]

Como acabou se revelando anteriormente em relação à teoria de grupos (veja o capítulo 2), quando os físicos toparam com essas variedades, descobriram que os matemáticos tinham estado ali antes deles. De fato, elas já tinham um nome: *espaços de módulos de Hitchin,* em homenagem ao matemático britânico Nigel Hitchin, professor da Universidade de Oxford, que tinha apresentado e estudado esses espaços em meados dos anos 1980. Embora seja claro por que um físico se interessaria por esses espaços – eles aparecem quando realizamos a redução dimensional de uma teoria de calibre quadridimensional –, os motivos do interesse de um matemático parecem menos óbvios.

Felizmente, Nigel Hitchin fez um relato detalhado[2] da história de sua descoberta, sendo um grande exemplo de interação sutil entre matemática e física. No final da década de 1970, Hitchin, Drinfeld e dois outros matemáticos, Michael Atiyah e Yuri Manin, estudaram as assim chamadas equações instanton, que os físicos propuseram estudando as teorias de calibre. Elas foram escritas num espaço-tempo quadridimensional plano. Posteriormente, Hitchin estudou as equações diferenciais num espaço tridimensional plano, denominadas equações monopolo, obtidas pela redução dimensional das equações instanton de quatro para três dimensões. Eram interessantes do ponto de vista da física, e também acabaram revelando uma estrutura matemática intrigante.

Então, era natural considerar as equações diferenciais obtidas reduzindo as equações instanton de quatro para duas dimensões. Infelizmente, os físicos tinham observado que essas equações não tinham nenhuma solução não trivial no espaço bidimensional plano (isto é, no plano) e, assim, não as perseguiram mais. O *insight* de Hitchin, porém, era que essas equações podiam ser escritas em relação a qualquer superfície de Riemann *curvada,* como a superfície de uma rosca ou de um pretzel. Os físicos deixaram escapar isso, porque, na época (início dos anos 1980), não estavam particularmente interessados em teorias quânticas de campos referentes a tais superfícies curvadas. Contudo, Hitchin percebeu que, matematicamente, soluções relativas a essas superfícies eram bastante valiosas. Ele apresentou seu espaço de módulos *M (X, G)* como o espaço de soluções dessas equações numa superfície de Riemann *X* (no caso de um grupo de calibre G).[*] Hitchin descobriu que era uma variedade notável; em particular, possuía uma “métrica hiperKähler”, da qual muitos poucos exemplos eram conhecidos na época. Outros matemáticos seguiram seus passos.

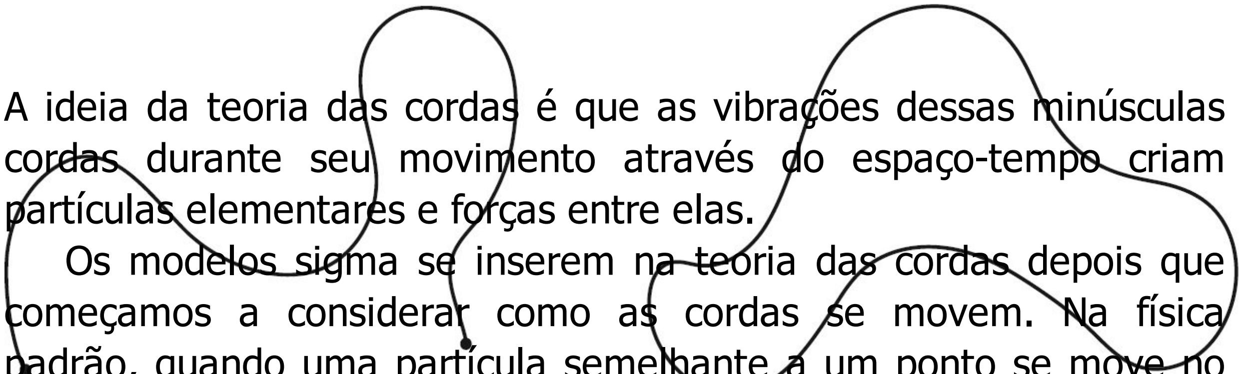
Cerca de dez anos depois, os físicos começaram a reconhecer a importância dessas variedades na física quântica, embora, na realidade, esse interesse só tenha se difundido depois do trabalho de Witten e seus colaboradores que estou descrevendo agora (também é interessante notar que os espaços de módulos de Hitchin, que originalmente apareceram na coluna direita da pedra de

Roseta de André Weil, recentemente encontraram aplicações no Programa de Langlands, na coluna central, em que o papel das superfícies de Riemann é desempenhado pelas curvas sobre corpos finitos[3]).

A interação entre matemática e física é um processo bidirecional, em que cada um dos dois assuntos se baseia e se inspira no outro. Em momentos diferentes, um deles pode assumir a iniciativa de desenvolver uma ideia específica, só para conceder ao outro assunto uma mudança de foco. No entanto, no todo, os dois interagem num círculo virtuoso de influência mútua.

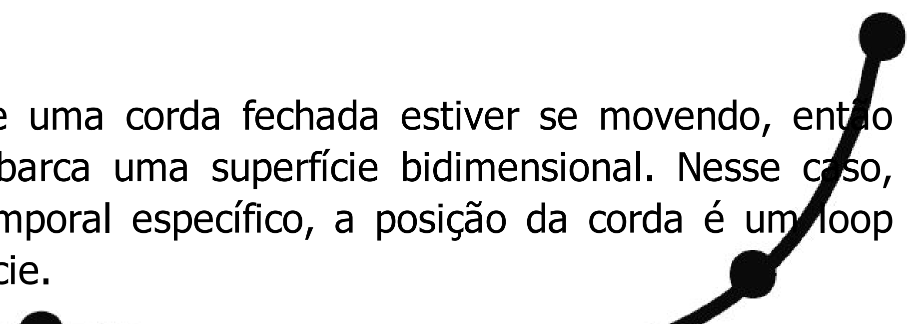
Então, munidos como estamos com os *insights* de matemáticos e físicos, apliquemos a dualidade eletromagnética na teoria de calibre quadridimensional com o grupo de calibre G. Obteremos a teoria de calibre com o grupo de calibre ${}^{L}G$, ou seja, o grupo dual de Langlands de G (lembre-se de que, se aplicarmos essa dualidade duas vezes, voltaremos ao grupo original G; em outras palavras, o grupo dual de Langlands de ${}^{L}G$ é o próprio grupo G). Logo, os modelos sigma bidimensionais efetivos em Σ, associados aos grupos G e ${}^{L}G$, também serão mutuamente equivalentes ou duais. Para os modelos sigma, esse tipo de dualidade é denominado *simetria especular.* Em um dos modelos sigma, consideramos aplicações de Σ no espaço de módulos de Hitchin $M(X, {}^{L}G)$, correspondente ao grupo ${}^{L}G$. Os dois espaços de módulos de Hitchin e seus modelos sigma não têm nada a ver uns com os outros *a priori;* assim, a simetria especular entre eles é apenas tão surpreendente quanto a dualidade eletromagnética referente às teorias de calibre originais em quatro dimensões.

O interesse dos físicos em modelos sigma bidimensionais desse tipo é motivado, em parte, pelo papel importante que eles desempenham na teoria das cordas. Como mencionei no capítulo 10, a teoria das cordas postula que objetos fundamentais da natureza são partículas elementares semelhantes a não pontos (não possuem geometria interna e, portanto, têm dimensão zero), mas são objetos estendidos unidimensionais denominados cordas, que podem ser abertos ou fechados. O primeiro dispõe de dois pontos finais, e o segundo inclui pequenos loops, muito parecidos com aqueles que vimos no capítulo 10.

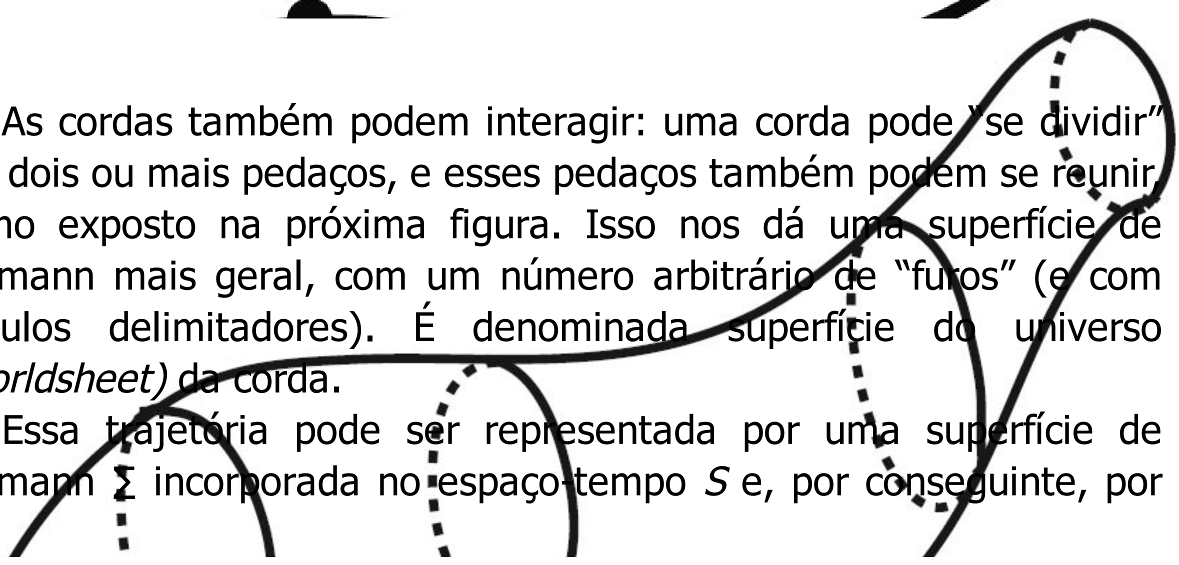


A ideia da teoria das cordas é que as vibrações dessas minúsculas cordas durante seu movimento através do espaço-tempo criam partículas elementares e forças entre elas.

Os modelos sigma se inserem na teoria das cordas depois que começamos a considerar como as cordas se movem. Na física padrão, quando uma partícula semelhante a um ponto se move no espaço, seu percurso é uma trajetória unidimensional. Em momentos temporais distintos, as posições da partícula são representadas por pontos sobre essa trajetória.

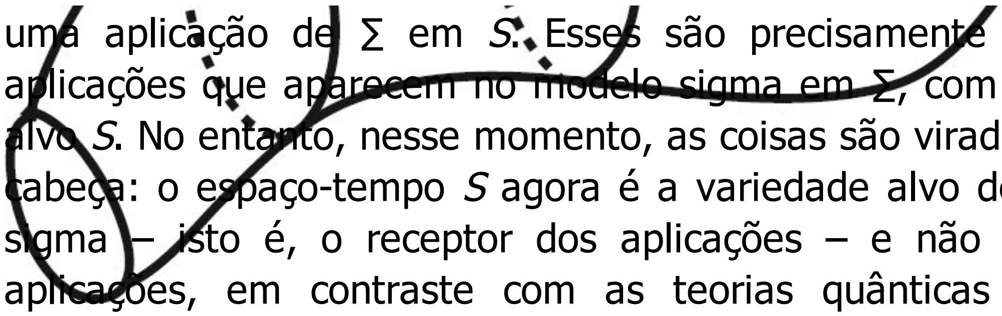


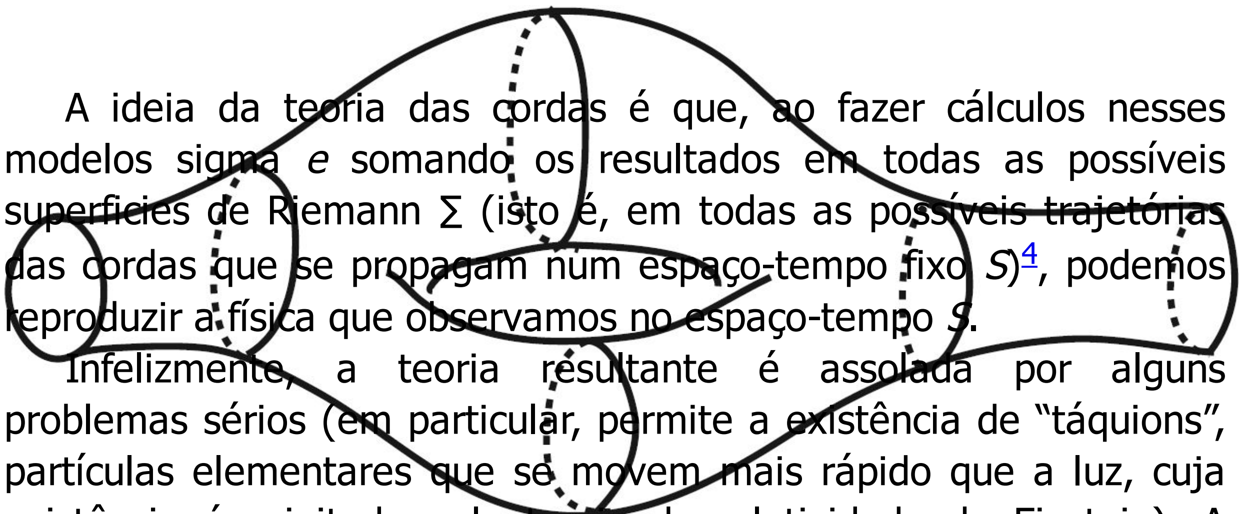
No entanto, se uma corda fechada estiver se movendo, então seu movimento abarca uma superfície bidimensional. Nesse caso, num momento temporal específico, a posição da corda é um loop sobre essa superfície.



As cordas também podem interagir: uma corda pode "se dividir" em dois ou mais pedaços, e esses pedaços também podem se reunir, como exposto na próxima figura. Isso nos dá uma superfície de Riemann mais geral, com um número arbitrário de "furos" (e com círculos delimitadores). É denominada superfície do universo *(worldsheet)* da corda.

Essa trajetória pode ser representada por uma superfície de Riemann Σ incorporada no espaço-tempo S e, por conseguinte, por uma aplicação de ∑ em *S*. Esses são precisamente os tipos de aplicações que aparecem no modelo sigma em ∑, com a variedade alvo *S*. No entanto, nesse momento, as coisas são viradas de ponta-cabeça: o espaço-tempo *S* agora é a variedade alvo desse modelo sigma – isto é, o receptor dos aplicações – e não a fonte das aplicações, em contraste com as teorias quânticas de campos convencionais, como a do eletromagnetismo.





A ideia da teoria das cordas é que, ao fazer cálculos nesses modelos sigma *e* somando os resultados em todas as possíveis superfícies de Riemann ∑ (isto é, em todas as possíveis trajetórias das cordas que se propagam num espaço-tempo fixo *S*)[4], podemos reproduzir a física que observamos no espaço-tempo *S*.

Infelizmente, a teoria resultante é assolada por alguns problemas sérios (em particular, permite a existência de "táquions", partículas elementares que se movem mais rápido que a luz, cuja existência é rejeitada pela teoria da relatividade de Einstein). A situação melhorará muito se considerarmos uma extensão supersimétrica da teoria das cordas. Então, obtemos o que se denomina *teoria de supercordas.* No entanto, há um problema novamente: a teoria de supercordas acaba se revelando matematicamente consistente somente se nosso espaço-tempo *S* tiver dez dimensões, o que está em desacordo com o mundo que observamos, que possui apenas quatro (três dimensões de espaço e uma de tempo).

No entanto, pode ser que nosso mundo seja realmente um produto, no sentido explicado acima, do espaço-tempo quadridimensional que observamos e de uma minúscula variedade hexadimensional *M,* que é tão pequena que não conseguimos vê-la usando os instrumentos disponíveis. Neste caso, então estaríamos numa situação similar à redução dimensional (de quatro para duas dimensões) que discutimos antes: a teoria decadimensional originaria uma teoria efetiva quadridimensional. A expectativa é que essa teoria efetiva descreva nosso universo e, em particular, inclua o Modelo Padrão e também a teoria quântica da gravidade. Essa promessa de possível unificação de todas as forças conhecidas da natureza é o principal motivo pelo qual a teoria de supercordas foi estudada tão amplamente nos últimos anos.[5]

Contudo, temos um problema: qual é essa variedade hexadimensional *M*?

Para avaliar quão intimidante é esse problema, vamos supor, em prol da argumentação, que a teoria de supercordas era matematicamente consistente em seis dimensões, e não dez. Então, haveria somente duas dimensões adicionais, e teríamos de encontrar uma variedade bidimensional *M*. Nesse caso, não haveria tantas alternativas: *M* teria de ser uma superfície de Riemann, que, como sabemos, é caracterizada por seu gênero, isto é, o número de "furos". Além disso, para que essa teoria funcione, esse *M* deve satisfazer certas propriedades adicionais; por exemplo, tem de ser o que se denomina variedade de Calabi-Yau, em homenagem a dois matemáticos, Eugenio Calabi e Shing-Tung Yau, que foram os primeiros a estudar esses espaços matematicamente (anos antes dos físicos se interessarem pelo assunto, devo acrescentar).[6] A única superfície de Riemann que possui essa propriedade é o toro. Portanto, se *M* fosse bidimensional, seríamos capazes de especificá-lo: teria de ser um toro.[7] No entanto, conforme a dimensão de *M* cresce, o mesmo acontece em relação ao número de possibilidades. Se *M* for hexadimensional, então, por meio de algumas estimativas, existirão 10[5]00 alternativas – um número inimaginavelmente grande, Qual dessas variedades hexadimensionais é obtida em nosso universo e como podemos verificar isso experimentalmente? Essa é uma das perguntas-chave da teoria das cordas que ainda continuam sem resposta.[8]

De qualquer forma, deve ficar claro a partir dessa discussão que os modelos sigma desempenham um papel decisivo na teoria de supercordas, e, de fato, sua simetria especular pode ser traçada em relação a uma dualidade da teoria.[9] Os modelos sigma também têm muitas aplicações fora da teoria das cordas. Os físicos têm os estudado de forma muito detalhada, e não só os modelos sigma em que a variedade alvo *M* é hexadimensional.[10]

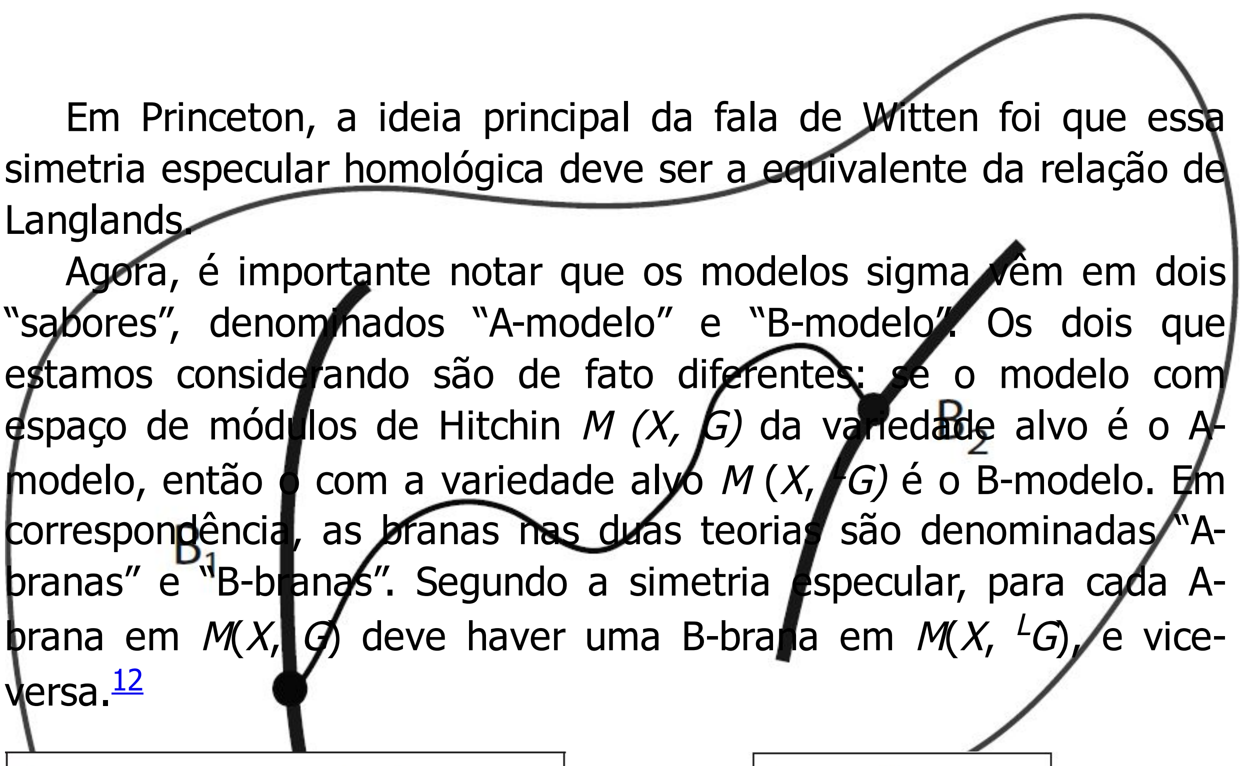
Assim, em 2004, quando Witten falou em nossa conferência, ele primeiro aplicou a técnica da redução dimensional (de quatro para duas dimensões), para reduzir a dualidade eletromagnética de duas teorias de calibre (com grupos de calibre G e ^{L}G) à simetria especular de dois modelos sigma (com os alvos sendo os espaços de módulos de Hitchin associados aos dois grupos duais de Langlands, G e ^{L}G). Então, ele perguntou: podemos ligar essa simetria especular ao Programa de Langlands?

A resposta que Witten sugeriu foi fascinante. Em geral, nas teorias quânticas de campos, estudamos algo denominado funções de correlação, que descrevem a interação das partículas; por exemplo, uma dessas funções pode ser utilizada para descrever a probabilidade de determinada partícula emergir da colisão de duas outras. No entanto, constatase que o formalismo da teoria quântica de campos é muito mais versátil: além dessas funções, também há diversos outros objetos sutis presentes, similares aos "feixes" que discutimos no capítulo 14, com relação ao dicionário de Grothendieck. Esses objetos recebem o nome de "Dbranas" ou, simplesmente, "branas".

As branas se originaram da teoria de supercordas, e seu nome vem da palavra "membrana". Elas surgem naturalmente quando consideramos o movimento das cordas abertas numa variedade alvo *M*. A maneira mais simples de descrever as posições das duas extremidades de uma corda aberta é especificar que um dos pontos finais pertence a um subconjunto específico, *B'1,* de *M*, e o outro pertence a outro subconjunto, B'_2. Isso é exposto na figura a seguir, em que a curva fina representa a corda aberta com dois pontos finais, um dos quais está em B_1,eo outro, em B_2.

Dessa maneira, os subconjuntos (ou, de modo mais adequado, subvariedades) B_1 e B_2 tornam-se participantes da teoria de supercordas e do modelo sigma correspondente. Esses subconjuntos são os protótipos das branas gerais que ocorrem nessas teorias.[11]

A simetria especular entre os dois modelos sigma origina uma relação entre suas branas. A existência dessa relação foi proposta originalmente pelo matemático Maxim Kontsevich, em meados da década de 1990, com o nome de “simetria especular homológica”. Foi amplamente estudada tanto por físicos como por matemáticos, sobretudo na última década.



Em Princeton, a ideia principal da fala de Witten foi que essa simetria especular homológica deve ser a equivalente da relação de Langlands.

Agora, é importante notar que os modelos sigma vêm em dois “sabores”, denominados “A-modelo” e “B-modelo”. Os dois que estamos considerando são de fato diferentes: se o modelo com espaço de módulos de Hitchin *M (X, G)* da variedade alvo é o A-modelo, então o com a variedade alvo *M* (*X*, ${}^LG$) é o B-modelo. Em correspondência, as branas nas duas teorias são denominadas “A-branas” e “B-branas”. Segundo a simetria especular, para cada A-brana em *M*(*X*, *G*) deve haver uma B-brana em *M*(*X*, ${}^LG$), e vice-versa.[12]

Para estabelecer a relação de Langlands geométrica, precisamos associar um feixe automorfo para cada representação do grupo fundamental de *X*, em ${}^LG$. Eis, em linhas gerais, como Witten propôs

$\boxed{\text{Uma representação do grupo fundamental de } X \text{ em } {}^LG} \longrightarrow \boxed{\text{Uma B-brana em } M(X, {}^LG)} \xrightarrow{\text{Simetria especular}}$

$\longrightarrow \boxed{\text{Uma A-brana em } M(X, G)} \longrightarrow \boxed{\text{Um feixe automorfo no espaço de módulos dos } G\text{-fibrados em } X}$

essa associação, que pode ser construída por meio da simetria especular:

Embora muitos detalhes permanecessem não resolvidos, a palestra de Witten representou um grande avanço: apresentou um caminho claro para o estabelecimento de uma ligação entre a dualidade eletromagnética e o Programa de Langlands. Por um lado, trouxe para o âmbito da matemática moderna diversas novas ideias em que os matemáticos não haviam pensado (certamente não com relação à Langlands geométrica): categorias de branas, o papel especial desempenhado pelos espaços de módulos de Hitchin no Programa de Langlands e a ligação entre A-branas e os feixes automorfos. Por outro lado, essa ligação também permitiu que os físicos utilizassem ideias e *insights* matemáticos para promover o entendimento da física quântica.

Nos dois anos seguintes, Witten desenvolveu os detalhes de sua proposta, em colaboração com Anton Kapustin, físico da Caltech e natural da Rússia. O trabalho deles[13] sobre o assunto (com 230 páginas) surgiu em abril de 2006 e alcançou grande repercussão nas comunidades de físicos e matemáticos. O parágrafo de abertura da monografia descreve diversos conceitos que discutimos neste livro:

> O Programa de Langlands para corpos numéricos unifica diversos resultados clássicos e contemporâneos da teoria dos números, sendo uma vasta área de pesquisa. O programa possui um análogo referente a curvas sobre um corpo finito, que também foi objeto de diversos trabalhos célebres. Além disso, a versão geométrica do Programa de Langlands para curvas foi bastante desenvolvida tanto para curvas sobre um corpo de característica p como para superfícies de Riemann complexas e comuns… Na presente monografia, nosso foco recai sobre o Programa de Langlands geométrico para superfícies de Riemann complexas. Visamos demonstrar como esse programa pode ser entendido como um capítulo da teoria quântica de campos. Nenhuma familiaridade prévia com o Programa de Langlands é presumida; em vez disso, supomos uma familiaridade com assuntos como teorias de calibre supersimétricas, dualidade eletromagnética, modelos sigma, simetria especular, branas e teoria de campo topológico. O tema do trabalho é mostrar que, quando esses

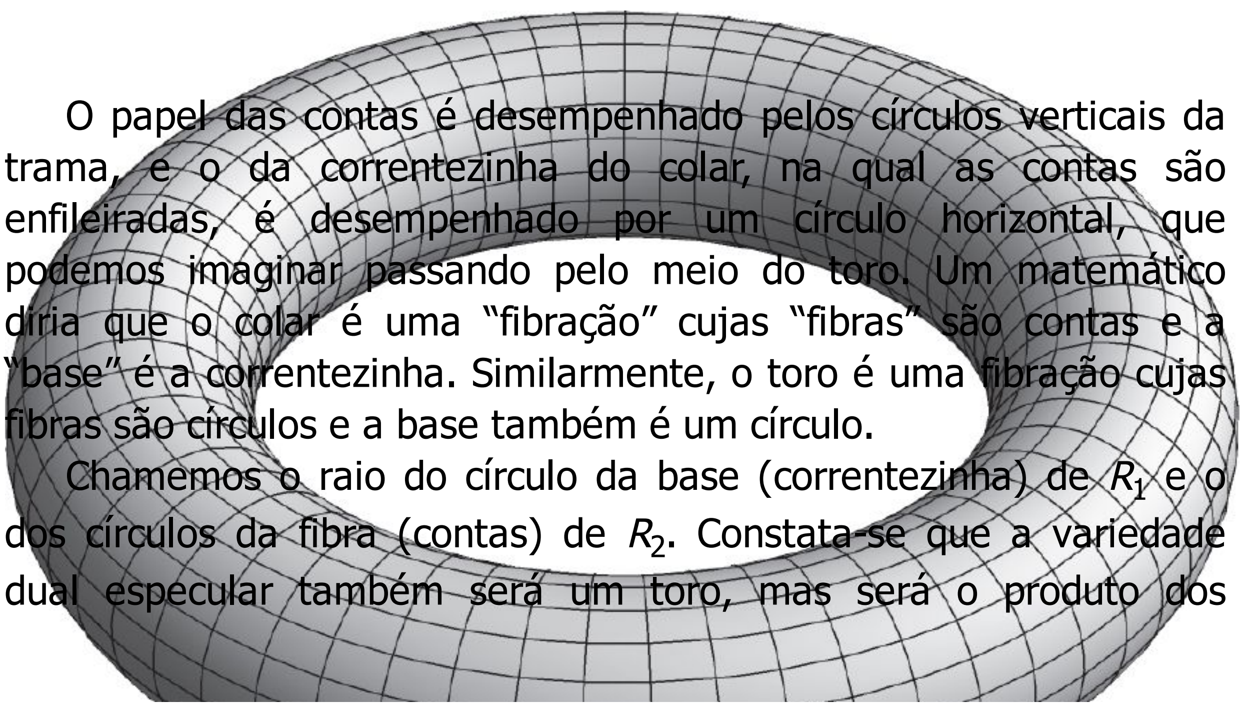
> ingredientes físicos familiares são aplicados ao problema correto, o Programa de Langlands geométrico surge naturalmente.

Posteriormente, na introdução, Kapustin e Witten creditaram o nosso seminário no Instituto de Estudos Avançados (em particular, a palestra proferida ali pelo meu ex-aluno David Ben-Zvi) como o ponto de partida da pesquisa deles.

No corpo principal da monografia, desenvolveram mais as ideias que Witten formulou em nosso seminário de Princeton. Em particular, elucidaram a estrutura das A-branas e das B-branas, a simetria especular entre elas e a ligação entre as A-branas e os feixes automorfos.

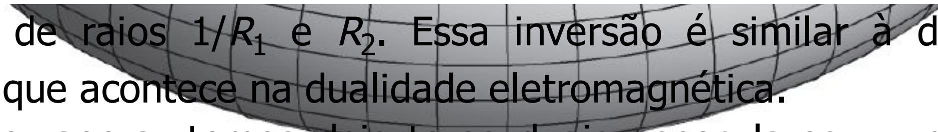
Para explicar seus resultados, comecemos com um exemplo mais simples de simetria especular. Na obra de Kapustin e Witten, a simetria especular está entre dois espaços de módulos de Hitchin e os modelos sigma correspondentes. No entanto, vamos substituir um desses espaços de módulos por um toro bidimensional.

Esse toro pode ser visto como o produto de dois círculos. De fato, na figura, a trama mostra claramente que o toro é como um colar de contas.



O papel das contas é desempenhado pelos círculos verticais da trama, e o da correntezinha do colar, na qual as contas são enfileiradas, é desempenhado por um círculo horizontal, que podemos imaginar passando pelo meio do toro. Um matemático diria que o colar é uma "fibração" cujas "fibras" são contas e a "base" é a correntezinha. Similarmente, o toro é uma fibração cujas fibras são círculos e a base também é um círculo.

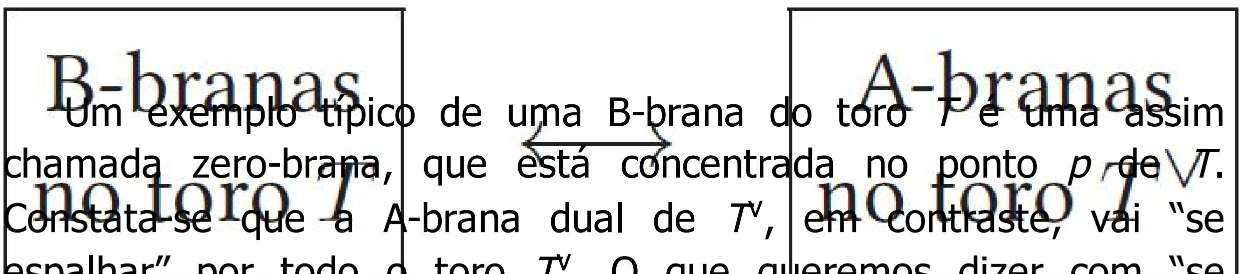
Chamemos o raio do círculo da base (correntezinha) de R_1 e o dos círculos da fibra (contas) de R_2. Constata-se que a variedade dual especular também será um toro, mas será o produto dos



círculos de raios $1/R_1$ e R_2. Essa inversão é similar à da carga elétrica que acontece na dualidade eletromagnética.

Então, agora, temos dois toros duais especulares – um deles, chamaremos de T, com os raios R_1 e R_2, eo outro, de $T^\vee$, com os raios $1/R_1$ e R_2. Note que, se o círculo da base de T é grande (isto é, se R_1 é grande), então o círculo da base de $T^\vee$ é pequeno (porque $1/R_1$ é pequeno), e vice-versa. Esse tipo de troca entre "grande" e "pequeno" é típico das dualidades na física quântica.

Estudemos as B-branas de T e as A-branas de $T^\vee$. Elas são compatibilizadas conforme a simetria especular, e sua relação é bem entendida (às vezes, é chamada de "T-dualidade" – T, de toro).[14]

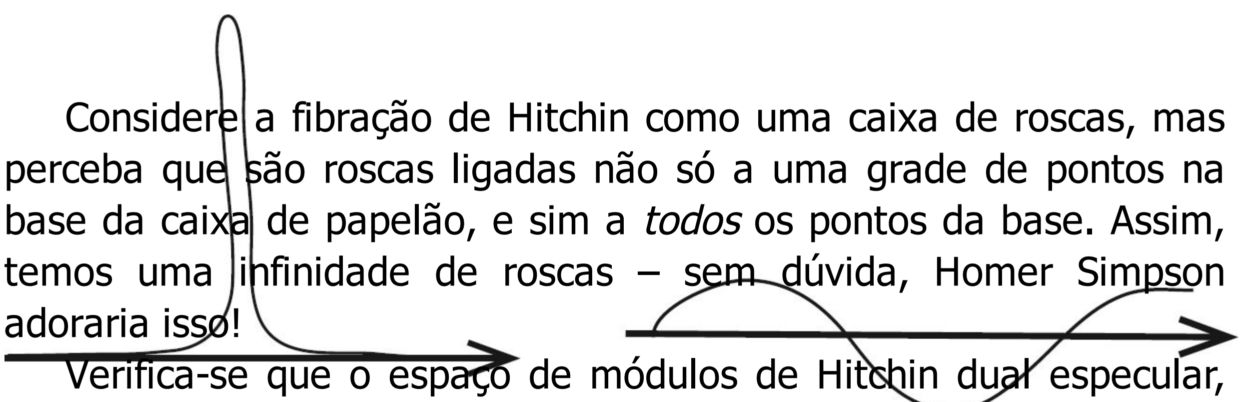


Um exemplo típico de uma B-brana do toro T é uma assim chamada zero-brana, que está concentrada no ponto p de T. Constata-se que a A-brana dual de $T^\vee$, em contraste, vai "se espalhar" por todo o toro $T^\vee$. O que queremos dizer com "se espalhar" requer uma explicação. Sem entrar em muitos detalhes, o que nos levaria longe demais, essa A-brana de $T^\vee$ é o próprio toro $T^\vee$ dotado de uma estrutura adicional: uma representação de seu grupo fundamental no grupo circular (similar àquelas que discutimos no capítulo 15). Essa representação determina-se pela posição do ponto original p no toro T, de modo que, de fato, haja uma correspondência um-a-um entre as zero-branas de T e as Abranas "espalhadas" em $T^\vee$.

O fenômeno é similar ao que acontece na assim chamada Transformada de Fourier, muito usada em processamento de sinais. Se aplicarmos a Transformada de Fourier num sinal concentrado perto de um momento específico no tempo, obteremos um sinal que parece uma onda. O último "se espalha" sobre a linha que representa o tempo, como exposto na figura.

A Transformada de Fourier também pode ser aplicada em diversos outros tipos de sinais, e há uma transformada inversa, que permite a recuperação do sinal original. Frequentemente, sinais complicados são transformados em simples; é por isso que a Transformada de Fourier é útil em aplicações. Da mesma forma, na simetria especular, branas complicadas de um toro correspondem a branas simples de outro, e vice-versa.

Constata-se que podemos utilizar a simetria especular tórica para descrever a simetria especular entre as branas dos espaços de módulos de Hitchin. Nesse caso, precisamos utilizar uma propriedade importante desses espaços, que foi descrita pelo próprio Hitchin. A saber, o espaço de módulos de Hitchin é uma fibração. A base da fibração é um espaço vetorial, e as fibras são toros. Isto é, todo o espaço é uma coleção de toros, um para cada ponto da base. No caso mais simples, tanto a base como as fibras tóricas são bidimensionais, e a fibração se parece com a figura abaixo (note que as fibras em pontos distintos da base podem ter tamanhos diferentes):

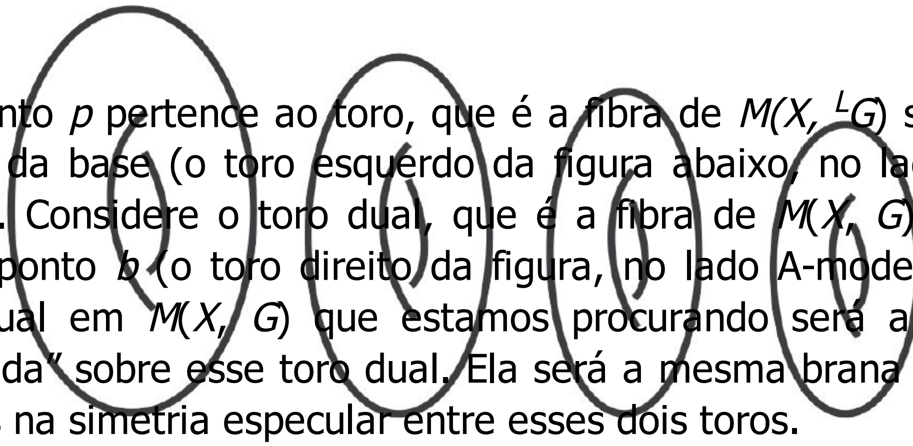


Considere a fibração de Hitchin como uma caixa de roscas, mas perceba que são roscas ligadas não só a uma grade de pontos na base da caixa de papelão, e sim a *todos* os pontos da base. Assim, temos uma infinidade de roscas – sem dúvida, Homer Simpson adoraria isso!

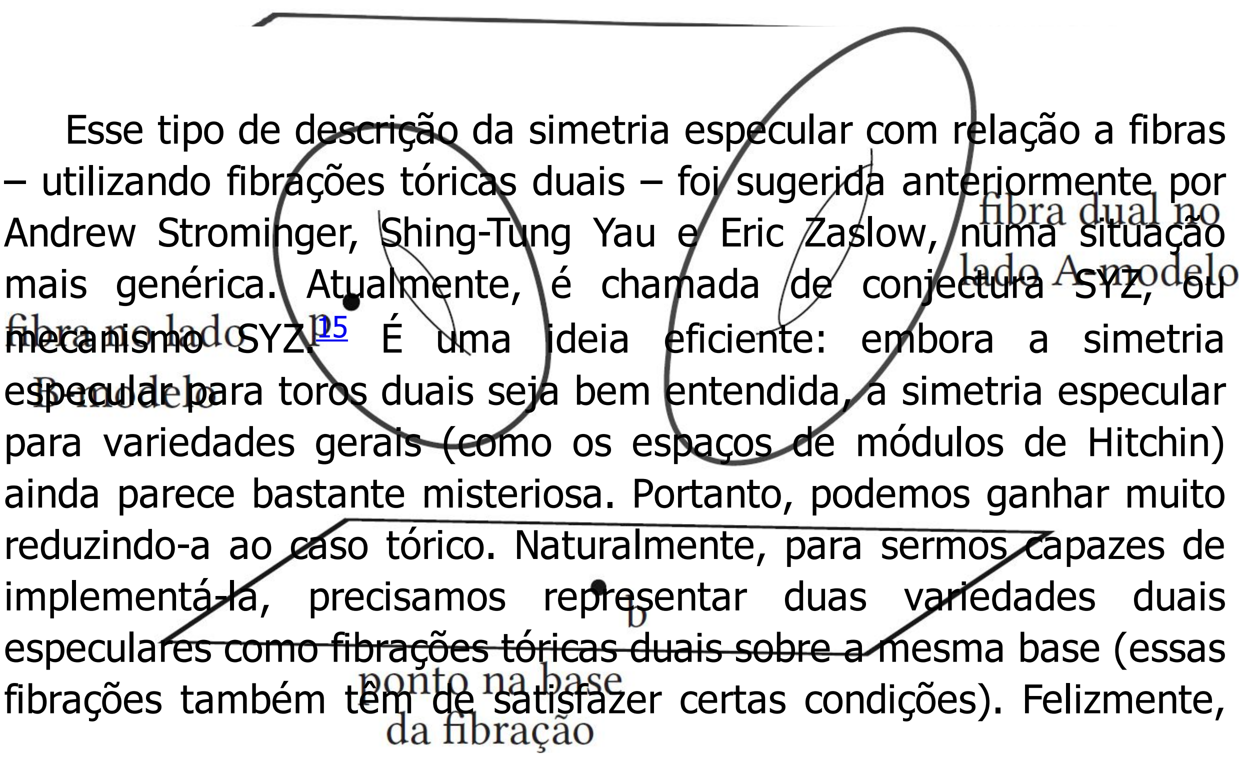
Verifica-se que o espaço de módulos de Hitchin dual especular, aquele associado ao grupo dual de Langlands, também é uma rosca/fibração tórica sobre a mesma base (“Roscas! Há alguma coisa que eles não possam fazer?”).[*] Isso significa que sobre cada ponto dessa base temos duas fibras tóricas: uma do espaço de módulos de Hitchin no lado do A-modelo, e outra do espaço de módulos de Hitchin do lado do B-modelo. Além disso, esses dois toros são dual especulares entre si, no sentido descrito acima (se um deles possui raios R_1 e R_2, então o outro tem raios $1/R_1$ e R_2).

Essa observação nos dá a oportunidade de estudar a simetria especular entre dois espaços de módulos de Hitchin com relação às fibras, utilizando a simetria especular entre as fibras tóricas duais.

Por exemplo, deixemos que *p* seja um ponto do espaço de módulos de Hitchin $M(X, {}^LG)$. Consideremos a zero-brana concentrada nesse ponto, Qual será o dual especular A-brana em $M(X, G)$?



O ponto *p* pertence ao toro, que é a fibra de $M(X, {}^LG)$ sobre um ponto *b* da base (o toro esquerdo da figura abaixo, no lado do B-modelo). Considere o toro dual, que é a fibra de $M(X, G)$ sobre o mesmo ponto *b* (o toro direito da figura, no lado A-modelo). A A-brana dual em $M(X, G)$ que estamos procurando será a A-brana "espalhada" sobre esse toro dual. Ela será a mesma brana dual que obtemos na simetria especular entre esses dois toros.



Esse tipo de descrição da simetria especular com relação a fibras – utilizando fibrações tóricas duais – foi sugerida anteriormente por Andrew Strominger, Shing-Tung Yau e Eric Zaslow, numa situação mais genérica. Atualmente, é chamada de conjectura SYZ, ou mecanismo SYZ.[15] É uma ideia eficiente: embora a simetria especular para toros duais seja bem entendida, a simetria especular para variedades gerais (como os espaços de módulos de Hitchin) ainda parece bastante misteriosa. Portanto, podemos ganhar muito reduzindo-a ao caso tórico. Naturalmente, para sermos capazes de implementá-la, precisamos representar duas variedades duais especulares como fibrações tóricas duais sobre a mesma base (essas fibrações também têm de satisfazer certas condições). Felizmente, temos essas fibrações no caso dos espaços de módulos de Hitchin e, assim, podemos pôr em ação o mecanismo SYZ (em geral, as dimensões das fibras tóricas são maiores do que dois, mas a imagem é similar).[16]

Então, utilizamos a simetria especular para construir a relação de Langlands. Em primeiro lugar, constata-se que os pontos do espaço de módulos de Hitchin *M(X, ^LG)* são precisamente as representações do grupo fundamental da superfície de Riemann *X*, em ^LG (veja a nota 1 deste capítulo). Consideremos a zero-brana concentrada nesse ponto. De acordo com o mecanismo SYZ, a A-brana dual vai “se espalhar” sobre o toro dual (a fibra do espaço de módulos de Hitchin sobre o mesmo ponto da base).

Kapustin e Witten não só descreveram essas A-branas em detalhes, mas também explicaram como convertê-las em feixes automorfos da relação de Langlands geométrica. Portanto, a relação de Langlands é alcançada por meio do fluxograma a seguir:

Uma representação do grupo fundamental de X em ^LG $\longrightarrow$ Uma zero-brana no ponto p de $M(X, {}^LG)$ $\xrightarrow[\text{especular}]{\text{Simetria}}$ Uma A-brana “espalhada” sobre o toro dual em $M(X, G)$ $\longrightarrow$ Um feixe automorfo sobre o espaço de módulos de G-fibrados em X

Um elemento essencial dessa construção é a aparência dos objetos intermediários: as A-branas. De acordo com Kapustin e Witten, a relação de Langlands pode ser feita em dois passos: primeiro constroem uma A-brana por meio da simetria especular. Em seguida, um feixe automorfo a partir dessa A-brana.[17]

Até agora, só discutimos o primeiro passo: a simetria especular. No entanto, o segundo passo também é muito interessante. De fato, a ligação entre as A-branas e os feixes automorfos foi um insight inovador de Kapustin e Witten; antes do trabalho deles, não se sabia que existia essa ligação. Além disso, Kapustin e Witten sugeriram que uma ligação similar existe numa situação muito mais genérica. Essa ideia notável já estimulou uma grande quantidade de pesquisas matemáticas.

Tudo isso, como diz meu pai, é bastante pesado: vimos espaços de módulos de Hitchin, simetria especular, A-branas, B-branas, feixes automorfos… Uma pessoa pode ficar com dor de cabeça só tentando acompanhar tudo isso. Acreditem em mim: mesmo entre os especialistas, poucas pessoas conhecem os detalhes práticos de todos os elementos dessa construção. No entanto, minha intenção não é que vocês aprendam todos eles. Em vez disso, quero indicar as ligações lógicas entre esses objetos e mostrar o processo criativo dos cientistas que os estudam: o que os motiva, como eles aprendem uns com os outros, como o conhecimento que adquirem é utilizado para promover nosso entendimento das questões-chave.

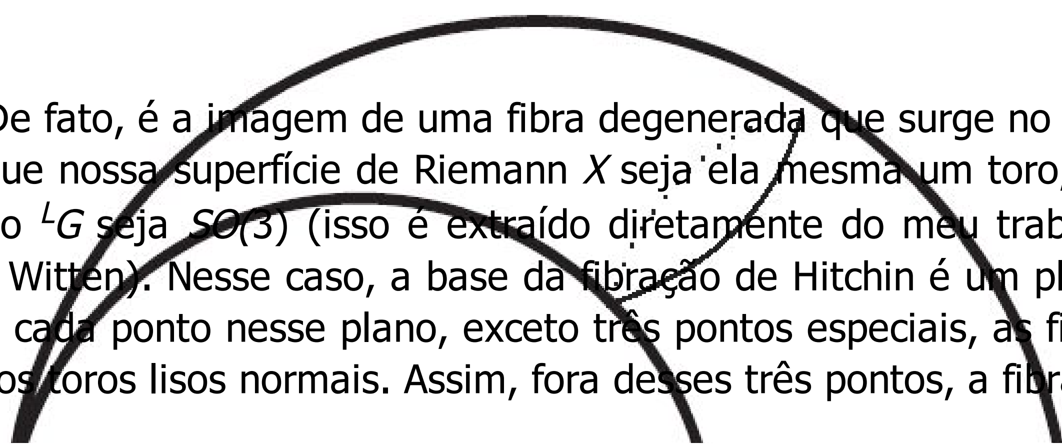
Contudo, para aliviar um pouco nosso fardo, eis um quadro que ilustra as analogias entre os objetos que discutimos e as colunas da pedra de Roseta de Weil, e mais uma coluna extra correspondente à física quântica. Ele amplia o quadro da página 196. (Combinei as colunas esquerda e central da pedra de Roseta de Weil, pois os objetos que aparecem nelas são muito similares mutuamente.)

Ao observar esse quadro, meu pai me perguntou: como Kapustin e Witten desenvolveram o Programa de Langlands? Claro que essa é uma pergunta importante. Em primeiro lugar, ligar o Programa de Langlands à simetria especular e à dualidade magnética permite o uso do poderoso arsenal dessas áreas da física quântica, para promover novos avanços do Programa de Langlands. Inversamente, as ideias do Programa de Langlands, transplantadas para a física, motivaram os físicos a formular algumas perguntas sobre a dualidade eletromagnética que eles jamais haviam formulado. Isso levou a algumas descobertas fascinantes. Em segundo lugar, a linguagem das A-branas acabou se revelando bem adaptada ao Programa de Langlands. Muitas dessas A-branas possuem uma estrutura muito mais simples do que os feixes automorfos, que são notoriamente complicados. Portanto, ao utilizar a linguagem das A-branas, podemos desvendar alguns dos mistérios do Programa de Langlands.

Teoria dos números & Curvas sobre Corpos finitos	Superfícies de Riemann X	Física quântica
Relação de Langlands	Relação de Langlands geométrica	Dualidade eletromagnética Simetria especular
Grupo de Galois	Grupo fundamental de X	Grupo fundamental de X
Representação do grupo de Galois em ${}^LG$	Representação do grupo fundamental em ${}^LG$	Zero-brana em $M({}^LG, X)$
Função automorfa	Feixe automorfo	A-brana em $M(G, X)$

Quero apresentar um exemplo concreto de como essa nova linguagem pode ser aplicada. Assim, comentarei a respeito de meu trabalho subsequente com Witten,[13] que concluímos em 2007. Para explicar o que fizemos, terei de falar a respeito de um problema que até agora eu, de certa forma, varri para debaixo do tapete. Na discussão acima, supus que todas as fibras que apareciam nos dois espaços de módulos de Hitchin são toros lisos a que estamos acostumados (como aqueles expostos nas figuras acima: roscas com formas perfeitas, por assim dizer). De fato, isso é verdadeiro para a maioria das fibras. No entanto, há algumas fibras especiais que parecem diferentes: são degenerações de toros lisos. Se não existissem degenerações, o mecanismo SYZ daria uma descrição completa da simetria especular entre as branas nos dois espaços de módulos de Hitchin. Contudo, a presença de toros degenerados complica muito essa simetria especular. A parte mais interessante e complicada da simetria especular é, de fato, o que acontece com as branas que "vivem" nesses toros degenerados.

Em seu trabalho, Kapustin e Witten só consideraram a simetria especular limitada a toros lisos. Isso deixou em aberto a questão a respeito dos toros degenerados. Em nosso trabalho, Witten e eu explicamos o que acontece no caso dos toros degenerados mais simples, aquele com as assim chamadas "singularidades orbifold", como a do toro comprimido exposto abaixo:



De fato, é a imagem de uma fibra degenerada que surge no caso de que nossa superfície de Riemann X seja ela mesma um toro, e o grupo ${}^LG$ seja $SO(3)$ (isso é extraído diretamente do meu trabalho com Witten). Nesse caso, a base da fibração de Hitchin é um plano. Para cada ponto nesse plano, exceto três pontos especiais, as fibras são os toros lisos normais. Assim, fora desses três pontos, a fibração de Hitchin é apenas uma família de toros/roscas lisos. No entanto, na vizinhança de cada um dos três pontos especiais, o "pescoço" da fibra tórica/rosca colapsa, como exposto na próxima figura, em que rastreamos as fibras sobre os pontos num determinado caminho na base.

É como se Homer Simpson ficasse muito excitado com o fato de ter uma caixa com uma infinidade de roscas que ele acidentalmente pisou, esmagando algumas (mas não se preocupe com Homer; ainda sobraria uma infinidade de roscas com o formato perfeito).

Conforme nos aproximamos do ponto marcado na base (que é um dos três pontos especiais), o pescoço do toro na fibra se torna cada vez mais fino, até colapsar no ponto marcado. Na figura anterior, a fibra no ponto marcado é exibida sob um ângulo diferente. Não é mais um toro; é o que podemos chamar de toro "degenerado".

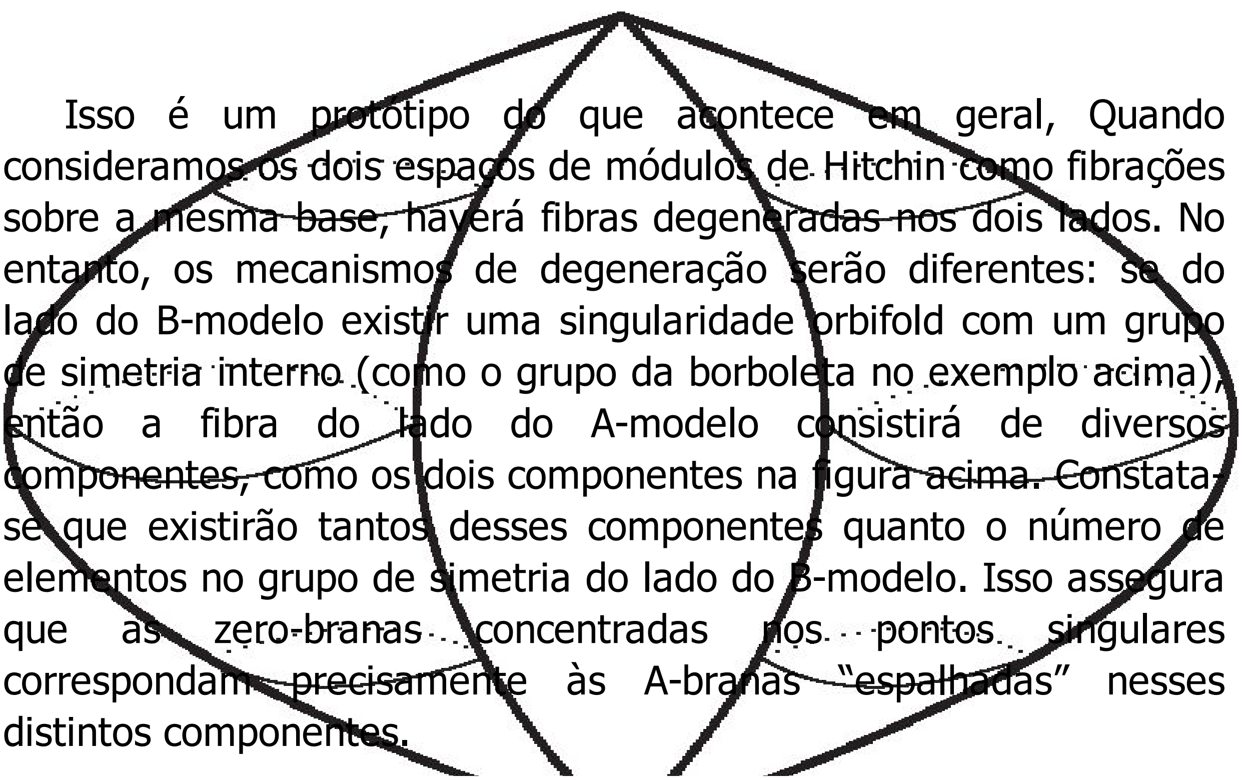
A pergunta que temos de responder é o que acontece quando a zero-brana no espaço de módulos de Hitchin se concentra no ponto especial do toro degenerado, como aquele marcado na figura acima, em que o pescoço colapsa. Os matemáticos chamam isso de singularidade orbifold.

No fim das contas, esse ponto possui um grupo de simetria adicional. No exemplo exposto acima, é igual ao grupo de simetrias de uma borboleta. Em outras palavras, consiste do elemento identidade e de um outro elemento, que correspondem à virada das asas da borboleta. Isso implica que não existe apenas uma zero-brana, mas sim duas zero-branas distintas concentradas nesse ponto. Então, a pergunta é: quais serão as duas A-branas correspondentes no espaço de módulos de Hitchin dual especular? (Nesse caso, note que G será o grupo $SU(2)$, que é o grupo dual de Langlands de $SO(3)$.)

Como Witten e eu explicamos em nosso trabalho, em cada um dos três pontos especiais na base da fibração de Hitchin, o toro degenerado no lado dual especular parecerá com a figura a seguir (a figura é extraída de nosso trabalho).

Ele aparece na fibração de Hitchin de forma semelhante àquilo que foi exposto na figura anterior, exceto que agora, conforme nos aproximamos de um dos pontos especiais da base, o pescoço do toro na fibra se torna cada vez mais fino em dois lugares, e colapsa quando alcançamos o ponto especial na base.

A fibra degenerada correspondente é bastante diferente da anterior, pois agora o toro colapsa em dois pontos, em vez de um. Portanto, esse toro degenerado possui dois pedaços. Os matemáticos os chamam de componentes. Neste momento, podemos responder à nossa pergunta: as duas A-branas que estamos procurando (dual especular para as duas zero-branas concentradas no ponto singular do primeiro toro degenerado) serão as A-branas "espalhadas" em cada um dos dois componentes do toro degenerado dual.



Isso é um protótipo do que acontece em geral, Quando consideramos os dois espaços de módulos de Hitchin como fibrações sobre a mesma base, haverá fibras degeneradas nos dois lados. No entanto, os mecanismos de degeneração serão diferentes: se do lado do B-modelo existir uma singularidade orbifold com um grupo de simetria interno (como o grupo da borboleta no exemplo acima), então a fibra do lado do A-modelo consistirá de diversos componentes, como os dois componentes na figura acima. Constata-se que existirão tantos desses componentes quanto o número de elementos no grupo de simetria do lado do B-modelo. Isso assegura que as zero-branas concentradas nos pontos singulares correspondam precisamente às A-branas "espalhadas" nesses distintos componentes.

No meu trabalho com Witten, analisamos esse fenômeno em detalhes. Um tanto surpreendentemente, isso nos levou a alguns novos *insights* não só referentes ao Programa de Langlands geométrico para superfícies de Riemann, mas também à coluna central da pedra de Roseta de Weil, que trata de curvas sobre corpos finitos. Esse é um bom exemplo de como as ideias e os *insights* em uma área (física quântica) podem se propagar de volta às raízes do Programa de Langlands.

É nisso que reside o poder dessas ligações. Agora temos não três, mas quatro colunas na pedra de Roseta de Weil: a quarta é para a física quântica, Quando descobrimos algo novo nessa quarta coluna, consideramos quais devem ser os resultados análogos nas outras três, e isso pode perfeitamente se tornar uma fonte de novas ideias e *insights.*

Em abril de 2007, Witten e eu começamos a trabalhar nesse projeto quando eu estava visitando o instituto, em Princeton, e o artigo foi finalizado no Dia das Bruxas (Halloween), em 31 de outubro (lembro-me bem da data, pois, após publicá-lo on-line, fui a uma festa de Halloween para comemorar). Nesses sete meses, estive três vezes no instituto, ficando cerca de uma semana em cada uma das vezes. Todos os dias trabalhávamos juntos no confortável escritorio de Witten. No restante do tempo, estivemos em lugares diferentes. Naquele período, dividia meu tempo entre Berkeley e Paris, e também passei duas semanas em visita ao IMPA, Instituto de Matemática no Rio de Janeiro. No entanto, meu paradeiro não tinha importância. Desde que eu tivesse uma conexão com a Internet, podíamos colaborar de maneira efetiva. Nos períodos mais intensos, trocávamos uma dúzia de e-mails por dia, refletíamos a respeito das dúvidas, enviávamos rascunhos do artigo um ao outro etc. Como temos o mesmo nome, havia uma espécie de simetria especular entre nossos e-mails: cada um começava com "Caro Edward" e terminava com "Tudo de bom, Edward".

Essa colaboração me deu a oportunidade de observar Witten de perto. Fiquei impressionando com sua capacidade intelectual e sua ética de trabalho. Percebi que ele pensa muito quanto à escolha de um problema a enfrentar. Comentei isso anteriormente no livro: há problemas que podem levar 350 anos para serem resolvidos; assim, é importante avaliar o grau de importância de um determinado problema, em relação à probabilidade de sucesso num período de tempo razoável. Acho que Witten tem uma grande intuição quanto a isso, e também um grande faro. E, após ele escolher o problema, é implacável na busca de sua solução, como o personagem de Tom Cruise no filme *Colateral.* Sua abordagem é criteriosa, metódica, movendo céu e terra. Como toda e qualquer pessoa, ele fica perplexo e confuso de vez em quando. No entanto, Witten sempre encontra um caminho. Em muitos níveis, trabalhar com ele foi inspirador e enriquecedor.

Rapidamente, a pesquisa a respeito da interface entre o Programa de Langlands e a dualidade eletromagnética tornou-se um tópico quente, que desenvolveu uma vibrante área de pesquisa. Nesse processo, um papel importante foi desempenhado pelas conferências anuais que organizamos no Instituto Kavli de Física Teórica, em Santa Barbara, na Califórnia. O diretor do instituto, David Gross, ganhador do Prêmio Nobel, nos deu grande apoio.

Em junho de 2009, fui chamado para falar a respeito desses novos desenvolvimentos no *Séminaire Bourbaki.* Um dos seminários de matemática mais antigos do mundo, ele é reverenciado pela comunidade matemática. Inúmeros matemáticos são atraídos para seus encontros no Instituto Henri Poincaré, em Paris, que acontecem durante um fim de semana, três vezes por ano. O seminário foi criado pouco depois da Segunda Guerra Mundial por um grupo de matemáticos jovens e ambiciosos que se denominaram – usando um nome ficticio – *Association des collaborateurs de Nicolás Bourbaki* (Associação dos colaboradores de Nicolas Bourbaki). A ideia do grupo foi reescrever os fundamentos da matemática por meio de um novo padrão de rigor, baseado na teoria dos conjuntos iniciada por Georg Cantor, no final do século XIX. Eles tiveram um êxito apenas parcial, mas sua influência sobre a matemática foi enorme. André Weil foi um dos membros fundadores, e Alexander Grothendieck desempenhou um papel importante posteriormente.

O objetivo do *Séminaire Bourbaki* é relatar os desenvolvimentos mais estimulantes da matemática. Uma comissão secreta que escolhe os tópicos e os palestrantes tem desde o começo seguido a regra de que seus membros devem ter menos de 50 anos. Aparentemente, os fundadores do movimento Bourbaki acreditavam que precisavam constantemente de sangue novo, e isso os atendeu muito bem. A comissão convida os palestrantes e, com antecedência, verifica se eles escrevem minuciosamente suas palestras. No seminário, cópias são distribuídas para a plateia. Como se considera uma honra apresentar uma palestra no seminário, os palestrantes cumprem a solicitação.

O título do meu seminário era "Teoria de calibre e dualidade de Langlands".[19] Embora minha palestra fosse mais técnica e envolvesse mais fórmulas e terminologia matemática, basicamente segui a história que relatei neste livro. Comecei com a pedra de Roseta de Weil, apresentando brevemente cada uma das três colunas, da mesma forma que fiz aqui. Como Weil foi um dos fundadores do grupo Bourbaki, achei que era bastante apropriado discutir suas ideias no seminário. Em seguida, foquei os desenvolvimentos mais recentes, ligando o Programa de Langlands e a dualidade eletromagnética.

A palestra foi bem recebida. Fiquei feliz de ver na primeira fila Jean-Pierre Serre, outro membro-chave do Bourbaki, uma lenda por legítimo direito. No final, ele se aproximou de mim. Após formular algumas perguntas técnicas perspicazes, fez uma observação:

– Achei interessante que você pense a respeito da física quântica como a quarta coluna da pedra de Roseta de Weil – ele disse. –

Sabe, André Weil não era especialmente apreciador da física. Mas acho que, se ele estivesse aqui hoje, concordaria que a física quântica tem um papel importante a desempenhar nessa história.

Este foi o melhor elogio que alguém poderia receber.

Nos últimos anos, muito progresso foi feito em relação ao Programa de Langlands através de todas as colunas da pedra de Roseta de Weil. Ainda estamos longe de entender inteiramente seus mistérios mais profundos, mas uma coisa é clara: o programa passou pelo teste do tempo. Hoje em dia, vemos com mais clareza que ele nos levou a algumas das perguntas mais fundamentais em matemática e física.

Essas ideias são tão essenciais hoje quanto foram quando Langlands escreveu sua carta para André Weil, quase cinquenta anos atrás. Não sei se conseguiremos encontrar todas as respostas nos próximos cinquenta anos, mas não resta dúvida de que eles serão no mínimo tão estimulantes quanto foram os últimos. E talvez alguns dos leitores deste livro tenham a oportunidade de contribuir para esse projeto fascinante.

O Programa de Langlands foi o foco deste livro. Acho que esse programa proporciona uma boa visão panorâmica da matemática moderna: sua estrutura conceitual profunda, seus *insights* inovadores, suas conjecturas tentadoras, seus teoremas profundos e suas ligações inesperadas entre campos distintos. Também ilustra os vínculos intricados entre a matemática e a física e o diálogo mutuamente enriquecedor entre essas duas matérias. Portanto, exemplifica as quatro qualidades das teorias matemáticas que discutimos no capítulo 2: universalidade, objetividade, resistência e aplicabilidade no mundo físico.

Claro que existem muitas outras áreas fascinantes da matemática. Na literatura, algumas foram expostas aos leigos; outras, não. Como Henry David Thoreau afirmou:[20] "Ouvimos falar da poesia da matemática, mas muito pouco dela já foi cantado."

Infelizmente, suas palavras parecem verdadeiras hoje, mais de 150 anos depois que ele as escreveu; o que quer dizer que nós, matemáticos, precisamos realizar um trabalho melhor de revelação do poder e da beleza de nosso assunto para um público mais amplo. Ao mesmo tempo, espero que a história do Programa de Langlands incite a curiosidade dos leitores a respeito da matemática e os motive a aprender mais.

*Nesse aspecto, Hitchin cita o grande poeta alemão Goethe: "Os matemáticos são como franceses: independente do que você diga a eles, eles traduzem em sua própria língua, e, imediatamente, é algo inteiramente diferente."

*Frase de Homer Simpson, personagem da série de TV *Os Simpsons.* (N. do T.)

Capítulo 18

Em busca da fórmula do amor

Em 2008, fui convidado a realizar pesquisas e palestras sobre meu trabalho em Paris, como beneficiário da recém-criada *Chaire d'Excellence,* concedida pela Fondation Sciences Mathématiques de Paris.

Paris é um dos centros mundiais da matemática; também é a capital do cinema. Estando ali, senti-me inspirado a realizar um filme sobre a matemática. Nos filmes convencionais, os matemáticos são geralmente retratados como excêntricos e desajustados sociais, à beira da doença mental, reforçando o estereótipo de um sujeito chato e insensível, muito distante da realidade. Quem pode querer uma vida assim para si, realizando um trabalho que supostamente não tem nada a ver com nada?

Quando voltei para Berkeley, em dezembro de 2008, senti o desejo de dar vazão à minha energia artística. Meu vizinho, dornas Farber, é um escritor maravilhoso e ensina escrita criativa na Universidade da Califórnia, em Berkeley.

– Que tal escrevermos um roteiro juntos a respeito de um escritor e um matemático? – perguntei-lhe.

Tom gostou da ideia e sugeriu que ambientássemos a história numa praia no sul da França. Decidimos que o filme começaria dessa maneira: um escritor e um matemático, num lindo dia de sol, sentados em mesas vizinhas, num café ao ar livre, na praia. Eles apreciam a beleza que os cerca, entreolham-se e começam a conversar. O que acontece a seguir?

Começamos a escrever. O processo era similar à maneira pela qual colaboro com matemáticos e físicos. Mas também era diferente: achar as palavras certas para descrever os sentimentos e as emoções dos personagens, alcançar o cerne da história. A estrutura era muito mais fluida e livre do que eu estava acostumado. E ali estava eu, ao lado de um grande escritor, por quem eu tinha muito respeito e admiração. Felizmente para mim, Tom não procurou impor sua vontade, mas me tratou como igual, deixando-me desenvolver minhas habilidades como escritor. Como os mentores que me orientaram no mundo da matemática, Tom me ajudou a ingressar no mundo da literatura, pelo que serei sempre grato.

Em um dos diálogos, o matemático discute com o escritor a respeito do "problema dos dois corpos". Refere-se a dois objetos (corpos) que interagem somente um com o outro, como uma estrela e um planeta (ignoramos todas as outras forças agindo neles). Há uma fórmula matemática simples que prevê com precisão suas trajetórias durante todo o tempo no futuro sabendo-se a força de atração entre eles. Quão diferente, porém, da interação de dois corpos humanos; dois amantes ou dois amigos. Neste caso, mesmo se o problema de dois corpos possuir solução, não será uma só.

Nosso roteiro trata da colisão entre o mundo real e o mundo da abstração: para Richard, o escritor, é o mundo da literatura e da arte; para Philip, o matemático, o mundo da ciência e da matemática. Cada um deles é fluente em seu respectivo domínio abstrato, mas de que maneira isso afeta o comportamento no mundo real? Philip está tentando lidar com a dicotomia entre a verdade matemática, em que ele é especialista, e a verdade humana, em que ele não é. Ele sabe que abordar os problemas da vida da mesma forma que os problemas matemáticos nem sempre ajuda.

Tom e eu também perguntamos: podemos ver as diferenças e semelhanças entre arte e ciência – as “duas culturas”, como C. P. Snow as chamou[1] – através das narrativas desses dois homens? De fato, uma pessoa pode interpretar o filme como uma metáfora sobre os dois lados da mesma personalidade: o lado esquerdo e o direito do cérebro, por assim dizer. Eles estão em constante disputa, mas também dão forma um ao outro: duas culturas coexistindo numa única mente.

Em nosso roteiro, os personagens trocam histórias de seus relacionamentos passados, amores encontrados e perdidos, mágoas. E eles conhecem diversas mulheres ao longo do dia; assim, podemos ver os dois homens usarem a paixão pelas suas profissões como meios de sedução. Também há bastante interesse mútuo entre eles, mas, ao mesmo tempo, um conflito está fermentando, e alcança uma conclusão inesperada no fim.

Intitulamos nosso roteiro de *The Two-Body Problem (O problema dos dois corpos),* e o publicamos como um livro.[2] Sua versão teatral foi apresentada em Berkeley, dirigida por Barbara Oliver, diretora premiada. Foi a primeira vez que me aventurei no mundo das artes, e fiquei tanto surpreso quanto satisfeito com a reação da plateia. Por exemplo, a maioria das pessoas considerou tudo que aconteceu ao matemático no roteiro como autobiográfico. Claro que muitas das minhas experiências da vida real contribuíram para a criação de *The Two-Body Problem.* Por exemplo, tive uma namorada russa em Paris, e algumas das qualidades de Natalia, namorada de Philip no roteiro, foram inspiradas nas qualidades dela. Algumas cenas foram baseadas na minha experiência, e outras, na de Tom. No entanto, como escritor, você é movido principalmente pelo desejo de criar personagens instigantes e uma história envolvente. Depois que decidimos o que queríamos transmitir, tivemos de moldar os personagens de determinado modo. Aquelas experiências da vida real ficaram tão embelezadas e distorcidas que não eram mais nossas. Os protagonistas de *The Two-Body Problem* ganharam vida própria, para a obra se tornar arte.

Quando começamos a procurar um produtor para nos ajudar a transformar *The Two-Body Problem* num filme de longa-metragem, achei que valeria a pena realizar um projeto cinematográfico numa escala menor. No momento em que voltei a Paris, para dar continuidade à minha *Chaire d'Excellence,* em abril de 2009, um amigo, o matemático Pierre Schapira, apresentou-me a Reine Graves, jovem e talentosa diretora. Ex-modelo de moda, ela dirigira alguns curtas-metragens originais e arrojados (um dos quais ganhou o prêmio Pasolini, no Festival de Filmes Censurados, em Paris). Num almoço marcado por Pierre, nos demos bem logo de cara. Sugeri trabalharmos juntos num curta-metragem sobre matemática, e Reine gostou da ideia. Meses depois, quando indagada a respeito disso, ela disse que achava que essa era uma das últimas áreas restantes na qual havia uma paixão autêntica.[3]

Quando começamos a trocar ideias, mostrei a Reine algumas fotos que fizera, nas quais pintei (digitalmente) tatuagens de fórmulas matemáticas sobre corpos humanos. Reine gostou delas, e decidimos que tentaríamos fazer um filme envolvendo a tatuagem de uma fórmula.

A tatuagem, como tipo de arte, originou-se no Japão. Visitei o país algumas vezes (para trabalhar com Feigin, que tinha passado seus verões na Universidade de Quioto) e sou fascinado pela cultura japonesa. Previsivelmente, Reine e eu buscamos inspiração no cinema japonês. Um filme era *Rito de amor e morte,* adaptação de um conto de Yukio Mishima, grande escritor japonês. O próprio Mishima dirigira e protagonizara o filme.

O filme é em preto e branco, e se desenrola num cenário austero e estilizado típico do teatro Nô japonês. Não tem diálogos, mas há uma trilha musical da ópera *Tristão e Isolda,* de Wagner. Há dois personagens: um jovem oficial da Guarda Imperial, o tenente Takeyama, e sua mulher, Reiko. Os amigos do oficial realizam um golpe de Estado fracassado (aqui o filme refere-se aos acontecimentos reais de fevereiro de 1936, que Mishima achava que tiveram um efeito dramático sobre a história japonesa). O tenente recebe a ordem de executar os perpetradores do golpe, mas não o consegue fazer, pois são seus amigos íntimos. No entanto, ninguém pode desobedecer às ordens do imperador. A única saída é o suicídio ritual, ou seja, o *seppuku* (ou haraquiri).

Embora tivesse apenas 29 minutos de duração, o filme me tocou profundamente. Fui capaz de sentir o vigor e a clareza da visão de Mishima. Sua atuação era vigorosa, bruta, contumaz. Podemos discordar de suas ideias (e, de fato, sua visão de uma ligação íntima entre amor e morte não me atrai), mas tenho muito respeito pelo autor, por ser tão forte e inflexível.

O filme de Mishima ia contra as convenções habituais do cinema: era mudo, com textos escritos entre os "capítulos" do filme, para explicar o que iria acontecer a seguir. Era teatral, com as cenas cuidadosamente representadas, com poucos movimentos. No entanto, fiquei encantado com a emoção subjacente (na ocasião, não tinha conhecimento da estranha semelhança da própria morte de Mishima com o que aconteceu em seu filme).

Talvez o filme repercutisse tanto em mim pelo fato de que Reine e eu também estávamos tentando criar algo não convencional, para falar de matemática de uma maneira que ninguém fizera antes. Achei que Mishima criara um arcabouço estético e uma linguagem que estávamos procurando. Liguei para Reine.

– Assisti ao filme de Mishima. É incrível. Deveríamos fazer um filme assim – eu disse.

– OK. Mas será sobre o quê?

Subitamente, as palavras começaram a jorrar de minha boca. Tudo estava absolutamente claro.

– Um matemático cria uma fórmula do amor – afirmei. – Mas ele descobre o outro lado da fórmula: ela pode ser usada tanto para o mal quanto para o bem. Ele descobre que tem de esconder a fórmula, para evitar que ela caia em mãos erradas. E ele decide tatuá-la no corpo da mulher amada.

– Parece excelente. Você tem alguma ideia para o título?

– Hmmm… Que tal *Rites of Love and Math* (Ritos de amor e matemática)?

E, assim, a ideia do filme nasceu.

Nós o imaginamos como uma alegoria, mostrando que uma fórmula matemática pode ser bela, como um poema, uma pintura ou uma obra musical. A ideia era agradar não ao cerebral, mas sim ao intuitivo e visceral. Deixar os espectadores primeiro *sentirem,* em vez de *entenderem.* Achamos que enfatizar os elementos humanos e espirituais da matemática ajudaria a inspirar a curiosidade do espectador.

A matemática, em particular, e a ciência, em geral, são muitas vezes apresentadas como frias e sem vida. Na realidade, o processo de criar uma nova matemática é uma busca apaixonada, uma experiência profundamente pessoal, exatamente como criar arte e música. Exige amor e dedicação, uma luta contra o desconhecido e consigo mesmo que provoca emoções fortes. E as fórmulas que você descobre realmente o impressionam, exatamente como as tatuagens no filme.

Em nosso filme, um matemático descobre a "fórmula do amor". Claro que isso é uma metáfora: sempre estamos tentando alcançar um entendimento completo, uma clareza definitiva, saber tudo. No mundo real, temos de nos contentar com o conhecimento e o entendimento parciais. Mas o que aconteceria se alguém fosse capaz de descobrir a Verdade final; e se ela pudesse ser enunciada por uma fórmula matemática? Esta seria a fórmula do amor.

Henry David Thoreau afirmou de modo eloquente:[4]

> A afirmação mais marcante e bela de qualquer verdade deve assumir no fim a forma matemática. Podemos assim simplificar as regras de filosofia moral e também da aritmética, pois uma única fórmula expressaria as duas.

Mesmo se uma única fórmula não fosse eficiente para explicar tudo, as fórmulas matemáticas são algumas das expressões mais puras, versáteis e econômicas da verdade conhecidas pela humanidade. Elas transmitem conhecimento atemporal e valioso, imune a modas passageiras, e comunicam o mesmo significado para qualquer um que entra em contato com elas. As verdades que expressam são as verdades necessárias, são os faróis firmes da realidade norteando a humanidade através do tempo e espaço.

Heinrich Hertz, que demonstrou a existência das ondas eletromagnéticas, e cujo sobrenome é utilizado agora como unidade de frequência, expressou sua admiração da seguinte maneira:[5]

Ninguém é capaz de escapar da sensação de que essas fórmulas matemáticas possuem existência independente e inteligência própria, que são mais sábias do que nós somos, ainda mais sábias do que seus descobridores.

Hertz não está sozinho em seu sentimento. A maioria dos praticantes da matemática acredita que as fórmulas e ideias habitam um mundo distinto. Robert Langlands afirma que a matemática "muitas vezes surge na forma de insinuações, uma palavra que sugere que a matemática, e não só seus conceitos básicos, existe independentemente de nós. É uma noção difícil de aceitar, mas também difícil de ser ignorada por um matemático profissional".[6] Isso é ecoado por outro matemático eminente, Yuri Manin (o mentor de Drinfeld), que fala a respeito de uma "visão do grande Castelo da Matemática, imponente em algum lugar do Mundo Platônico das Ideias, que (os matemáticos) descobrem de maneira humilde e devotada (em vez de inventar)".[7]

Desse ponto de vista, os grupos de Galois foram *descobertos* pelo prodígio francês, em vez de *inventados* por ele. Até ser descoberto, esse conceito vivia em algum lugar nos jardins encantados do mundo ideal da matemática, esperando para ser encontrado. Mesmo se os documentos de Galois tivessem sumido e não houvesse sido dado a ele o devido crédito por sua descoberta, exatamente os mesmos grupos teriam sido descobertos por outra pessoa.

Compare isso com as descobertas de outras áreas do esforço humano: se Steve Jobs não tivesse voltado para a Apple, talvez jamais tivéssemos conhecido iPods, iPhones e iPads. Outras inovações tecnológicas teriam sido feitas, mas não há motivo para esperar que os mesmos elementos tivessem sido encontrados por outros. Em contraste, as verdades matemáticas são inevitáveis.

Frequentemente, o mundo habitado pelos conceitos e ideias matemáticas é chamado de mundo platônico da matemática, em homenagem a Platão, filósofo grego, que foi o primeiro a afirmar que as entidades matemáticas são independentes de nossas atividades racionais.[8] No livro *The Road to Reality,* o aclamado físico-matemático Roger Penrose diz que as asserções matemáticas que pertencem ao mundo platônico da matemática "são exatamente aquelas que são objetivamente verdadeiras. Dizer que alguma asserção matemática possui uma existência platônica é dizer simplesmente que é verdadeira num sentido objetivo". Da mesma forma, as noções matemáticas "possuem uma existência platônica porque são noções objetivas".[9]

Como Penrose, acredito que o mundo platônico da matemática é distinto dos mundos físico e mental. Por exemplo, consideremos o Último Teorema de Fermat. Em seu livro, Penrose pergunta de modo retórico se "concordamos que a asserção de Fermat era sempre válida, muito antes de Fermat realmente fazê-la, ou [se] sua validade [é] uma questão meramente cultural, dependente de quaisquer padrões subjetivos da comunidade dos matemáticos humanos".[10] Valendo-se da tradição consagrada pelo tempo da argumentação por meio de *reductio ad ab-surdum* ("redução ao absurdo", em latim), Penrose mostra que abraçar a intepretação subjetiva nos leva rapidamente a asserções que são "evidentemente absurdas", enfatizando a independência do conhecimento matemático de qualquer atividade humana.

Kurt Gödel, cujo trabalho – sobretudo, os celebrados teoremas da incompletude – revolucionou a lógica matemática, era um defensor despudorado dessa visão. Ele afirmou que os conceitos matemáticos "formam uma realidade objetiva por sua própria conta, que não podemos criar ou mudar, mas só perceber e descrever".[11] Em outras palavras, "a matemática descreve uma realidade não sensitiva, que existe independentemente tanto dos atos como das disposições da mente humana, apenas sendo percebida, e, provavelmente, de modo muito incompleto, pela mente humana".[12]

O mundo platônico da matemática também existe independentemente da realidade física. Por exemplo, como discutimos no capítulo 16, os instrumentos das teorias de calibre foram desenvolvidos originalmente pelos matemáticos, sem qualquer referência à física. De fato, constatou-se que apenas três desses modelos descrevem forças conhecidas da natureza (eletromagnética, fraca e forte). Elas correspondem a três grupos de Lie específicos (grupo circular, $SU(2)$ e $SU(3)$, respectivamente), embora exista uma teoria de calibre para *qualquer* grupo de Lie. As teorias de calibre associadas aos grupos de Lie diferentes daquelas três são perfeitamente sólidas matematicamente, mas não existem ligações conhecidas entre elas e o mundo real. Além disso, discutimos sobre as extensões supersimétricas dessas teorias de calibre, que podemos analisar matematicamente, ainda que a supersimetria não seja encontrada na natureza e muito possivelmente não esteja presente nela. Modelos similares também fazem sentido matematicamente num espaço-tempo que possui dimensão diferente de quatro. Há muitos outros exemplos de teorias matemáticas valiosas, que não estão ligadas diretamente a qualquer tipo de realidade física.

Em seu livro *Shadows of the Mind,* Roger Penrose fala a respeito do triângulo composto pelo mundo físico, o mundo mental e o mundo platônico da matemática.[13] Eles são distintos, mas estão profundamente entrelaçados. Ainda não entendemos plenamente como estão ligados, mas uma coisa é clara: cada um afeta nossas vidas de maneira profunda. No entanto, enquanto todos nós valorizamos a importância dos mundos físico e mental, muitos continuam alegremente ignorantes quanto ao mundo da matemática. Acredito que, quando nos dermos conta dessa realidade oculta e utilizarmos seus poderes inexplorados, ocorrerá em nossa sociedade uma mudança com as dimensões da Revolução Industrial.

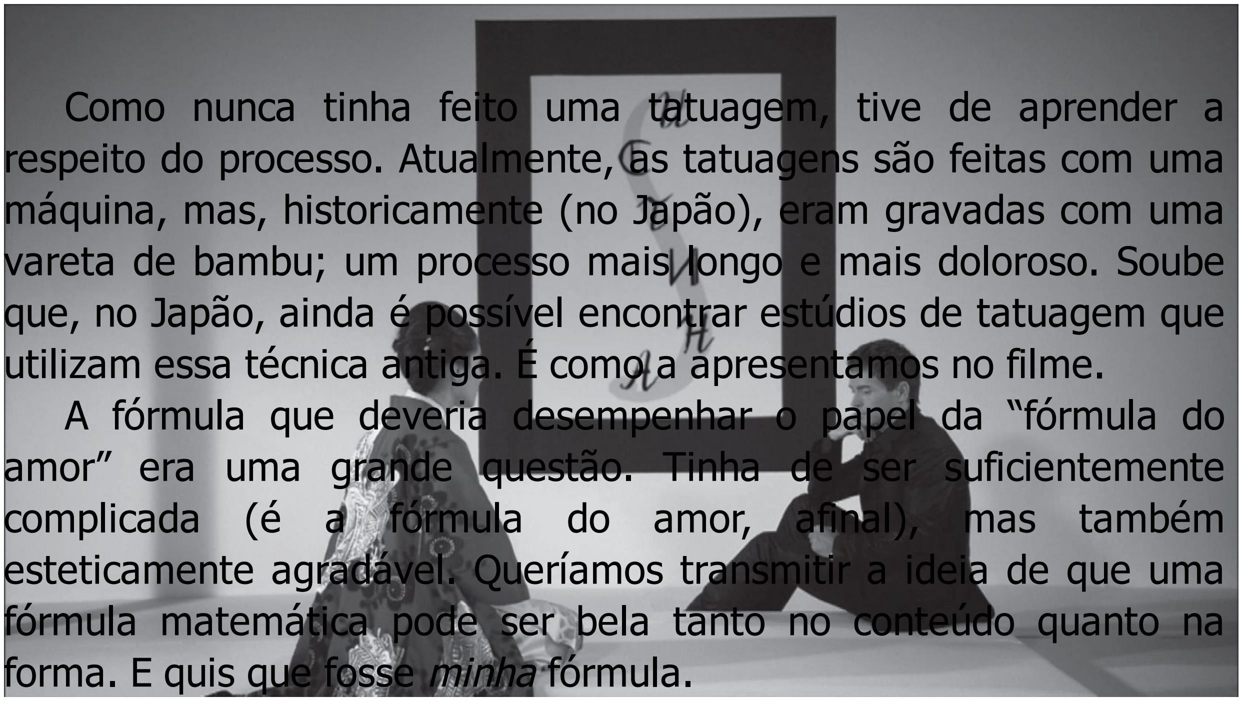
Do meu ponto de vista, a objetividade do conhecimento matemático é a fonte de suas possibilidades ilimitadas. Essa qualidade diferencia a matemática de qualquer outro tipo de esforço humano. Acredito que entender o que está por trás dessa qualidade elucidará os mistérios mais profundos da realidade física, da consciência e das inter-relações entre ambas. Em outras palavras, quanto mais perto chegarmos do mundo platônico da matemática, mais poder teremos para entender o mundo ao nosso redor e o nosso lugar nele.

Felizmente, nada pode nos deter de nos aprofundarmos nessa realidade platônica e integrá-la em nossas vidas. O verdadeiramente notável é a democracia inerente da matemática: enquanto algumas partes dos mundos físico e mental podem ser percebidas ou interpretadas de modo diferente por distintas pessoas, ou podem até mesmo não ser acessíveis a alguns de nós, os conceitos e as equações são percebidos da mesma maneira e pertencem a todos *igualmente.* Ninguém tem o monopólio sobre o conhecimento matemático; ninguém pode reivindicar uma fórmula ou ideia como sua invenção; ninguém pode patentear uma fórmula! Albert Einstein, por exemplo, não seria capaz de patentear sua fórmula $E = mc^2$. Pois, se correta, uma fórmula matemática enuncia uma verdade eterna a respeito do universo. Portanto, ninguém pode clamar sua propriedade; ela é nossa, e podemos compartilhá-la à vontade.[14] Rico ou pobre, negro ou branco, jovem ou adulto, ninguém pode tirar essas fórmulas de nós. Nesse mundo, nada é tão profundo e elegante, e, no entanto, tão disponível para todos.

Seguindo Mishima, o destaque do cenário austero de *Rites of Love and Math* era uma grande caligrafia pendurada na parede. No filme de Mishima, a caligrafia dizia *shisei* – sinceridade. O filme dele tratava de sinceridade e honra. O nosso tratava da verdade, de modo tão natural que achamos que nossa caligrafia devia significar verdade. E decidimos fazer isso não em japonês, mas em russo.

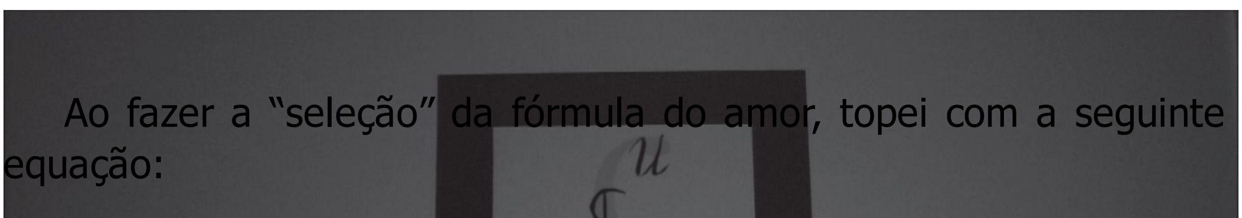
A palavra "verdade" tem duas traduções em russo. A mais familiar, *pravda,* refere-se à verdade factual, como uma notícia (por isso, era o nome do jornal oficial do Partido Comunista da URSS). A outra, *istina,* significa uma verdade mais profunda, filosófica. Por exemplo, o enunciado que diz que o grupo de simetrias de uma mesa redonda é um círculo é *pravda,* mas o enunciado do Programa de Langlands (nos casos em que foi demonstrado) é *istina.* Evidentemente, a verdade pela qual o matemático se sacrifica no filme é *istina.*

Em nosso filme, quisemos refletir sobre o aspecto moral do conhecimento matemático: uma fórmula com tanto poder pode ter outro lado, podendo ser utilizada para o mal. Consideremos um grupo de físicos teóricos no início do século XX tentando entender a estrutura do átomo. O que eles faziam era uma busca científica pura e nobre, que, inadvertidamente, levou-os à descoberta da energia atômica. Trouxe-nos muita coisa boa, mas também destruição e morte. Da mesma forma, uma fórmula matemática descoberta como parte de nossa busca do conhecimento pode se mostrar nociva. Embora os cientistas devam ser livres para perseguir suas ideias, também acredito que é nossa responsabilidade fazer tudo ao nosso alcance para assegurar que as fórmulas descobertas por nós não sejam empregadas para o mal. Eis por que, em nosso filme, o matemático está preparado para morrer para proteger a fórmula de cair em mãos erradas. A tatuagem é sua maneira de esconder a fórmula e, ao mesmo tempo, assegurar que ela sobreviva.



Como nunca tinha feito uma tatuagem, tive de aprender a respeito do processo. Atualmente, as tatuagens são feitas com uma máquina, mas, historicamente (no Japão), eram gravadas com uma vareta de bambu; um processo mais longo e mais doloroso. Soube que, no Japão, ainda é possível encontrar estúdios de tatuagem que utilizam essa técnica antiga. É como a apresentamos no filme.

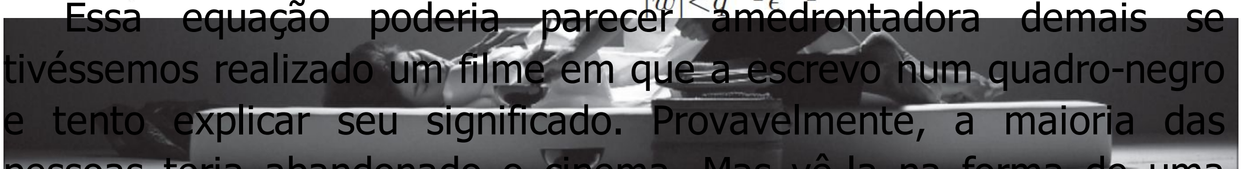
A fórmula que deveria desempenhar o papel da "fórmula do amor" era uma grande questão. Tinha de ser suficientemente complicada (é a fórmula do amor, afinal), mas também esteticamente agradável. Queríamos transmitir a ideia de que uma fórmula matemática pode ser bela tanto no conteúdo quanto na forma. E quis que fosse *minha* fórmula.



Ao fazer a "seleção" da fórmula do amor, topei com a seguinte equação:

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \omega F(qz, \overline{qz}) = \sum_{m,\overline{m}=0}^{\infty} \int_{|z|<\epsilon^{-1}} \omega_{z\overline{z}}\, z^m \overline{z}^{\overline{m}} dz d\overline{z} \cdot \frac{q^m \overline{q}^{\overline{m}}}{m!\overline{m}!} \partial_z^m \partial_{\overline{z}}^{\overline{m}} F \Big|_{z=0} + q\overline{q} \sum_{m,\overline{m}=0}^{\infty} \frac{q^{-m}\overline{q}^{-\overline{m}}}{m!\overline{m}!} \partial_w^m \partial_{\overline{w}}^{\overline{m}} \omega_{w\overline{w}} \Big|_{w=0} \int_{|w|<q^{-1}\epsilon^{-1}} F\, w^m \overline{w}^{\overline{m}} dw d\overline{w}.$$

Ela aparece como a fórmula (5.7) de um trabalho de cem páginas intitulado *Instantons Beyond Topological Fieory I* (Instantons além da teoria topológica I), que escrevi em 2006, com dois bons amigos, Andrey Losev e Nikita Nekrasov.[15]

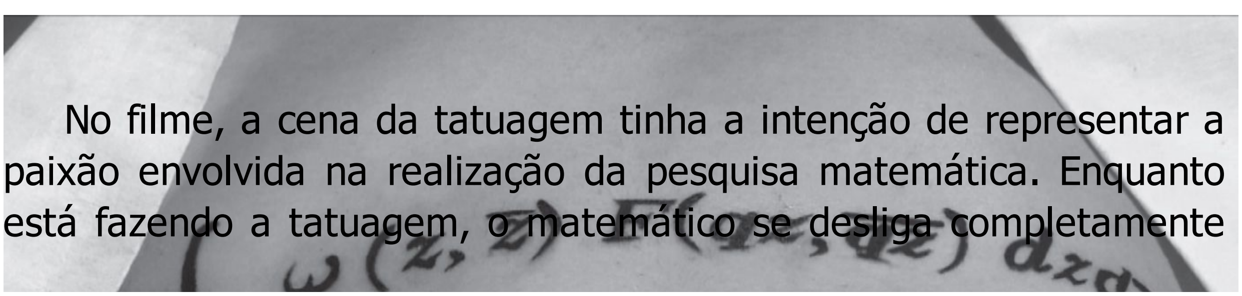


Essa equação poderia parecer amedrontadora demais se tivéssemos realizado um filme em que a escrevo num quadro-negro e tento explicar seu significado. Provavelmente, a maioria das pessoas teria abandonado o cinema. Mas vê-la na forma de uma tatuagem provocou uma reação totalmente diferente. Impressionou a todos: todos quiseram saber o significado dela.

O que ela significa? Nossa monografia era a primeira parte de uma série que elaboramos acerca de uma nova abordagem relativa às teorias quânticas de campos envolvendo “instantons” – são configurações de campos com propriedades notáveis. Embora as teorias quânticas de campos tenham sido bem-sucedidas em descrever com precisão a interação entre partículas elementares, há diversos fenômenos importantes que ainda são entendidos de maneira deficiente. Por exemplo, conforme o Modelo Padrão, os prótons e os nêutrons consistem de três quarks cada um, que não podem ser separados. Na física, o fenômeno é conhecido como confinamento. Sua explicação teórica adequada ainda é deficiente, e muitos físicos acreditam que os instantons são a chave para a solução desse mistério. No entanto, na abordagem convencional relativa às teorias quânticas de campos, os instantons são elusivos.

Propusemos uma abordagem nova relativa às teorias quânticas de campos que esperávamos que nos ajudasse a entender melhor os efeitos poderosos dos instantons. A fórmula anterior enuncia uma identidade surpreendente entre duas maneiras de calcular a função de correlação em uma de nossas teorias.[16] Na época em que a descobrimos mal sabíamos que, em pouco tempo, ela seria designada para desempenhar o papel de fórmula do amor.

Oriane Giraud, nossa artista de efeitos especiais, gostou da fórmula, mas disse que era muito complicada para uma tatuagem. Simplifiquei a notação, e eis como ela aparece em nosso filme:



No filme, a cena da tatuagem tinha a intenção de representar a paixão envolvida na realização da pesquisa matemática. Enquanto está fazendo a tatuagem, o matemático se desliga completamente do mundo. Para ele, a fórmula realmente se torna uma questão de vida e morte.

A tomada dessa cena levou horas. Foi exaustiva psicológica e fisicamente tanto para mim quanto para Kayshonne Insixieng May, a atriz que representou Mariko. Terminamos a cena perto da meia-noite, em nosso último dia de filmagem. Foi um momento emocionante para nossa equipe de cerca de trinta pessoas, depois de tudo que passamos juntos.

A estreia do filme foi em abril de 2010, patrocinada pela Fondation Sciences Mathématiques de Paris, no cinema Max Linder Panorama, um dos melhores da capital francesa. Foi um sucesso. Os primeiros artigos sobre o filme começaram a aparecer. Para o *Le Monde, Rites of Love and Math* era um "curta-metragem maravilhoso", que "oferece uma visão romântica incomum da matemática".[17] Segundo o *New Scientist*:[18]

> É lindo de ver... Se o objetivo de Frenkel foi trazer mais pessoas para a matemática, ele pode se felicitar pelo trabalho benfeito. A fórmula do amor, que é, na realidade, uma versão simplificada de uma equação que ele publicou em 2006, num trabalho a respeito da teoria quântica de campos intitulado *Instantons Beyond Topological Theory I,* provavelmente terá sido vista em breve – senão entendida – por um público muito maior do que teria sido alcançado.

Nas palavras da revista francesa *Tangente Sup,*[19] o filme "vai intrigar aqueles que consideram a matemática como um contrário absoluto da arte e da poesia". Num encarte acompanhando o artigo, Hervé Lehning escreveu:

> Na pesquisa matemática de Edward Frenkel, a simetria e a dualidade são de grande importância. Estão relacionadas ao Programa de Langlands, que tem o objetivo de estabelecer uma ponte entre a teoria dos números e as representações de certos grupos. Na realidade, esse assunto bastante abstrato possui aplicações, por exemplo, na criptografia... Se a ideia da dualidade é tão importante para Edward Frenkel, alguém pode perguntar se ele observa uma dualidade entre o amor e a matemática, como o título de

seu filme sugere. Sua resposta a essa pergunta é clara. Para ele, a pesquisa matemática é como uma história de amor.

Desde então, o filme foi exibido em festivais de cinema em Paris, Quioto, Madri, Santa Barbara, Bilbao, Veneza… As exibições e a publicidade resultante me deram a oportunidade de perceber algumas das diferenças entre as "duas culturas". Inicialmente, isso veio como um choque cultural. Minha matemática só é capaz de ser entendida por um número reduzido de pessoas; às vezes, não mais do que uma dúzia em todo o mundo. Além disso, como cada fórmula matemática representa uma verdade objetiva, há basicamente apenas uma maneira de interpretar aquela verdade. Portanto, meu trabalho matemático é percebido da mesma maneira por qualquer um que o lê. Em contraste, nosso filme destinava-se a um público amplo: milhares de pessoas sendo alcançadas ao mesmo tempo. E, naturalmente, todas o interpretavam à sua maneira.

O que aprendi com isso é que o espectador sempre faz parte de um projeto artístico; no final, tudo acontece pelos olhos do observador. Um criador não possui poder sobre as percepções dos espectadores. Mas é claro que há algo do qual podemos nos beneficiar, pois, quando compartilhamos nossas visões, todos saímos enriquecidos.

Em nosso filme, tentamos criar uma síntese de duas culturas, falando sobre matemática com sensibilidade artística. No início, Mariko está escrevendo um poema de amor para o matemático.[20] Quando, no fim do filme, ele tatua a fórmula, esta é sua maneira de retribuir: para ele, a fórmula é uma expressão do seu amor. Ela pode transmitir a mesma paixão e carga emocional de um poema, e essa foi nossa maneira de apresentar o paralelo entre matemática e poesia. Para o matemático, a fórmula é seu presente de amor, o produto de sua criação, paixão, imaginação. É como se ele estivesse escrevendo uma carta de amor para ela; lembrem-se do jovem Galois escrevendo suas equações nas vésperas de sua morte.

No entanto, quem é ela? No arcabouço do mundo mítico que imaginamos, ela é a encarnação da Verdade Matemática (este é o motivo por que seu nome é Mariko, que significa "verdade" em japonês, e também por que a palavra *istina* é caligrafada na pintura pendurada na parede). O amor do matemático por ela tem a intenção de representar o amor dele pela matemática e pela verdade, pelas quais se sacrifica. No entanto, ela tem de sobreviver e transmitir a fórmula dele, como se fosse o filho dos dois. A Verdade Matemática é eterna.

A matemática pode ser a linguagem do amor? Alguns espectadores ficaram perturbados com a ideia de uma "fórmula do amor". Por exemplo, alguém me disse após assistir ao filme: "Lógica e sentimentos nem sempre se dão bem. Por isso dizemos que o amor é cego. Assim, como uma fórmula do amor pode funcionar?" De fato, muitas vezes, nossos sentimentos e nossas emoções parecem irracionais para nós (embora cientistas cognitivos digam que alguns aspectos dessa aparente irracionalidade podem realmente ser descritos por meio da matemática). Portanto, não acredito que exista uma fórmula que descreve ou explica o amor. Quando falo de uma ligação entre amor e matemática, não quero dizer que o amor pode ser reduzido à matemática. Em vez disso, a minha ideia é que há muito mais matemática do que a maioria de nós percebe. Entre outras coisas, a matemática oferece um fundamento lógico e uma capacidade adicional de nos amarmos e amarmos o mundo ao nosso redor. Uma fórmula matemática não explica o amor, mas pode transmitir uma carga de amor.

Como a poeta Norma Farber escreveu:[21]

Make me no lazy love…
Move mefrom case to case.[*]

A matemática muda “de caso para caso”, e nisso reside sua função espiritual profunda e amplamente inexplorada.

Albert Einstein escreveu:[22] “Todos que estão seriamente envolvidos na busca da ciência se convenceram de que algum espírito se manifesta nas leis do universo – um espírito muitíssimo superior ao do homem, e um diante do qual nós, com nossos modestos poderes, devemos nos sentir humildes.” E Isaac Newton expressou seus sentimentos desta maneira:[23] “Tenho a impressão de ter sido somente um garoto brincando e me divertindo na praia, encontrando, de vez em quando, um seixo mais liso ou uma concha mais bonita que o normal, enquanto que o grande oceano da verdade permanece todo desconhecido diante de mim.”

Meu sonho é que um dia todos nós nos daremos conta dessa realidade escondida. Dessa maneira, talvez possamos ser capazes de deixar de lado nossas diferenças e nos voltarmos para as profundas verdades que nos unem. Então, todos nós seremos como crianças brincando na praia, maravilhados com a beleza deslumbrante e a harmonia que descobrimos, compartilhamos e apreciamos juntos.

*Não me faça amor preguiçoso…/ Mova-me de caso a caso.

Epílogo

Meu avião está pousando no Aeroporto Logan, em Boston. É janeiro de 2012. Estou chegando para a reunião conjunta anual da American Mathematical Society (AMS) e Mathematical Association of America, convidado para participar da 2012 AMS Colloquium Lectures. Essas palestras são proferidas desde 1896, anualmente. Observar a lista dos palestrantes do passado e os assuntos de suas palestras é como revisitar a história da matemática do século XX: John von Neumann, Shiing-Shen Chern, Michael Atiyah, Raoul Bott, Robert Langlands, Edward Witten e muitos outros grandes matemáticos. Sinto-me humildemente honrado de fazer parte dessa tradição.

Voltar para Boston me traz lembranças. Meu primeiro pouso no Logan foi em setembro de 1989, quando vim para Harvard – parafraseando o título do famoso filme *From Russia with Math* (Da Rússia com matemática; o título original era *From Russia with Love* [Da Rússia com amor] – no Brasil, *Moscou contra 007*). Na época, tinha 21 anos, não sabendo ainda o que esperar, o que iria acontecer. Três meses depois, crescendo rápido naqueles tempos turbulentos, voltei ao Logan para me despedir de meu mentor Boris Feigin, que estava voltando para Moscou, perguntando-me quando eu o veria de novo. Na realidade, nossa colaboração matemática e amizade continuaram, e floresceram.

Minha permanência em Harvard acabou se revelando muito mais longa do que eu esperava: obtive meu diploma de doutorado no ano seguinte, fui eleito para a Harvard Society of Fellows e, no fim de meu prazo ali, fui designado professor-adjunto. Em seguida, cinco anos depois de minha chegada a Boston, no Logan, esperava ansiosamente meus pais e a família de minha irmã, para se juntarem a mim e se estabelecerem nos Estados Unidos. Desde então, eles vivem na Grande Boston, mas eu parti em 1997, depois que a Universidade da Califórnia, em Berkeley, fez-me uma proposta irrecusável.

Ainda vou a Boston com regularidade para visitar a minha família. Aliás, meus pais moram a apenas alguns quarteirões de distância do Hynes Convention Center, onde acontece a reunião conjunta anual. Assim, eles terão a oportunidade de me ver em ação pela primeira vez. Que belo presente – ser capaz de compartilhar essa experiência com minha família. "Bem-vindo à casa!"

A reunião conjunta tem mais de sete mil participantes registrados; muito provavelmente, é o maior encontro de matemáticos de todos os tempos. Muitos deles vieram para as minhas palestras, realizadas num salão de bailes. Meus pais, minha irmã e minha sobrinha estão na primeira fila. As palestras são sobre meu recente trabalho com Robert Langlands e Ngô Bảo Châu. É o resultado de três anos de colaboração – nossa tentativa de desenvolver ainda mais as ideias do Programa de Langlands.[1]

– E se fizéssemos um filme a respeito do Programa de Langlands? – pergunto à plateia. – Neste caso, como qualquer roteirista diria, teríamos de responder a perguntas como estas: O que está em jogo? Quem são os personagens? Qual é o enredo da história? Quais são os conflitos? Como são resolvidos?

No auditório, as pessoas estão sorrindo. Falo sobre André Weil e sua pedra de Roseta. Prosseguimos numa viagem através de diferentes continentes do mundo da matemática, examinando ligações misteriosas entre eles.

Cada clique do controle remoto leva ao próximo slide da minha apresentação, exibida em quatro telas gigantes. Cada um descreve um pequeno passo em nossa busca interminável pelo conhecimento. Estamos refletindo a respeito de perguntas eternas referentes à verdade e à beleza. E quanto mais aprendemos sobre a matemática – esse mágico universo oculto –, mais entendemos o quão pouco sabemos, o quanto mais se situa à frente. Nossa jornada prossegue.

Agradecimentos

Agradeço à DARPA e à National Science Foundation por apoiar parte da minha pesquisa descrita neste livro. O livro foi concluído enquanto eu era professor do Miller Institute for Basic Research in Science, da Universidade da Califórnia, em Berkeley.

Sou grato ao meu editor, T. J. Kelleher, e à minha editora de projeto, Melissa Veronesi, da Basic Books, pela orientação especializada.

Durante a elaboração do livro, beneficiei-me de discussões proveitosas com Sara Bershtel, Robert Brazell, David Eisenbud, Marc Gerald, Masako King, Susan Rabiner, Sasha Raskin, Philibert Schogt, Margit Schwab, Eric Weinstein e David Yezzi.

Meu muito obrigado a Alex Freedland, Ben Glass, Claude Levesque, Kayvan Mashayekh e Corinne Trang pela leitura de partes do livro em diversos estágios e pelos conselhos muito úteis. Sou grato a Andrea Young pelas fotos do "truque da caneca", utilizadas no capítulo 15.

Meus agradecimentos especiais a Thomas Farber pelos diversos *insights* e conselhos, e a Marie Levek pela leitura do original e pelas perguntas que me ajudaram a melhorar a apresentação em diversos pontos. Meu pai, Vladimir Frenkel, leu os diversos rascunhos do livro, e seu *feedback* foi inestimável.

Meu muito obrigado aos meus professores, mentores e outros que me ajudaram em minha jornada, e estão isentos de culpa,

espero, da história que contei.

Acima de tudo, meus agradecimentos aos meus pais, Lidia e Vladimir Frenkel, cujo amor e apoio tornaram possível tudo que alcancei. Dedico este livro a eles.

Notas

Prefácio

1. Edward Frenkel, *Don't Let Economists and Politicians Hack Your Math,* Slate, 8 de fevereiro de 2013.
Disponível on-line, em: http://goo.gl/UYe4Na

Capítulo 1 – Um animal misterioso

1. Crédito da imagem: Physics World.
Disponível on-line, em: http://goo.gl/LJdHzy

2. Crédito da imagem: Arpad Horvath.

Capítulo 2 – A essência da simetría

1. Nessa discussão, utilizamos a expressão "simetria de um objeto" como termo para uma transformação específica preservando um objeto, como a rotação de uma mesa. Não dizemos "simetria de um objeto" para expressar a propriedade de um objeto para ser simétrico.

2. Se utilizarmos a rotação no sentido horário, obtemos o mesmo conjunto de rotações: rotação no sentido horário de 90 graus

é igual à rotação no sentido anti-horário de 270 graus etc. Por questão de convenção, os matemáticos geralmente consideram as rotações no sentido anti-horário, mas é apenas uma questão de escolha.

3. Isso pode parecer supérfluo, mas não estamos sendo meticulosos nesse caso. Devemos incluir isso se quisermos ser consistentes. Afirmamos que uma simetria é qualquer transformação que preserva nosso objeto, e a identidade é essa transformação.

Para evitarmos confusão, nessa discussão desejo enfatizar que nós só nos preocupamos com o resultado final de uma determinada simetria. O que fazemos com o objeto no processo não tem importância; apenas as posições finais de todos os pontos do objeto importam. Por exemplo, se girarmos a mesa 360 graus, então cada ponto termina na mesma posição que estava inicialmente. Eis por que para nós a rotação de 360 graus é igual à simetria de nenhuma rotação. Pelo mesmo motivo, a rotação de 90 graus no sentido anti-horário é igual à rotação de 270 graus no sentido horário. Como outro exemplo, vamos supor que empurramos a mesa sobre o piso por três metros numa determinada direção e, em seguida, a empurramos de volta por três metros; ou que movemos a mesa para outro aposento e, em seguida, a trouxemos de volta. Desde que acabe na mesma posição e cada um de seus pontos acabe na mesma posição que estava inicialmente, esta é considerada a mesma simetria que a simetria idêntica.

4. Há uma propriedade importante que a composição das simetrias satisfaz denominada *associatividade:* dadas três simetrias, *S, S′* e *S″*; considerando sua composição em duas ordens distintas, (*S* o *S′*) o *S″* e *S* o (*S′* o *S″*), dão o mesmo

resultado. Essa propriedade está incluída na definição formal de um grupo como um axioma adicional. Não mencionamos isso no corpo principal do livro, pois, nos grupos que consideramos, essa propriedade é evidentemente satisfeita.

5. Quando discutimos a respeito das simetrias de uma mesa quadrada, achamos conveniente identificar as quatro simetrias com os quatro cantos da mesma. No entanto, essa identificação depende da escolha de um dos cantos: aquele que representa a simetria identidade. Depois da realização dessa escolha, podemos identificar cada simetria com o canto no qual o canto escolhido é transformado por essa simetria. A desvantagem é que, se escolhermos um canto diferente para representar a simetria identidade, obteremos uma identificação diferente. Por esse motivo, é melhor fazermos uma distinção entre as simetrias da mesa e os pontos da mesa.

6. Ver Sean Carroll, The Particle at the End of the Universe: How the Hunt for the Higgs Boson Leads Us to the Edge of a New World, Dutton, 2012.

7. O matemático Félix Klein utilizou a ideia de que as formas são determinadas pelas suas propriedades de simetria como ponto de partida de seu muito influente Programa de Erlangen, em 1872, no qual declarou que características importantes de qualquer geometria são determinadas por um grupo de simetria. Por exemplo, na geometria euclidiana, o grupo de simetria consiste de todas as transformações do espaço euclidiano que preservam distâncias. Essas transformações são composições de rotações e translações. As geometrias não euclidianas correspondem a outros grupos de simetria.

Isso nos permite classificar possíveis geometrias, classificando grupos de simetria pertinentes.

8. Isso não quer dizer que nenhum aspecto de um enunciado matemático está sujeito à interpretação; por exemplo, questões como o quão importante é um determinado enunciado; o quão amplamente é aplicável; o quão é importante para o desenvolvimento da matemática etc. podem estar sujeitas a debate. No entanto, o *significado* do enunciado – o que exatamente ele afirma – não está aberto à interpretação se ele é logicamente consistente (a consistência lógica do enunciado não está sujeita a debate também sempre que escolhemos o sistema de axiomas dentro do qual ele é realizado).

9. Note que cada rotação também origina uma simetria de qualquer objeto redondo, como a mesa redonda. Portanto, em princípio, também podemos falar de uma representação do grupo de simetrias por meio das simetrias da mesa redonda, em vez de por meio de um plano. No entanto, na matemática, o termo "representação" é reservado específicamente para a situação em que um determinado grupo origina simetrias de um espaço n-dimensional. Essas simetrias devem ser o que os matemáticos denominam transformações lineares, conceito explicado na nota 2 do capítulo 14.

10. Para qualquer elemento g do grupo de rotações, denote a simetria correspondente do espaço n-dimensional por S_g. Deve ser uma transformação linear para qualquer g, e as propriedades a seguir devem ser satisfeitas: primeiro, para qualquer par de elementos do grupo, g e h, a simetria $S_{g \circ h}$ deve ser igual à composição das simetrias S_g e S_h. E, segundo,

a simetria correspondente ao elemento identidade do grupo deve ser a simetria identidade do plano.

11. Posteriormente, descobriu-se que existem três outros quarks, denominados "charm", "top" e "bottom", e os anti-quarks correspondentes.

Capítulo 3 –O quinto problema

2. Também havia uma pequena sinagoga semioficial em Marina Rosha. A situação melhorou após a *perestroika,* quando mais sinagogas e centros comunitários judaicos foram abertos em Moscou e outras cidades.

2. Mark Saúl, "Kerosinka: An episode in the history of Soviet mathe-matics". Em: Notices of the American Mathematical Society, vol. 46, novembro de 1999, pp. 1217-1220. Disponível on-line, em: http://goo.gl/tl4hUj

3. George G. Szpiro, "Bella Abramovna Subbotovskaya and the "Jewish People's University"". Em: Notices of the American Mathematical Society, vol. 54, novembro de 2007, pp. 1326–1330. Disponível on-line, em: http://goo.gl/5NX8r5

4. Alexander Shen dá uma lista de alguns problemas que eram apresentados aos estudantes judeus no exame vestibular da MGU, em seu artigo "Entrance examinations to the Mekh-Mat". Em: *Mathe-matical Intelligencer,* vol. 16, No. 4, 1994, pp. 6-10. Esse artigo é reproduzido no livro M. Shifman (ed.), *YouFailed YourMath Test, Comrade Einstein,* World Scientific, 2005. Disponível on-line, em: http://goo.gl/fZqGGn

Ver também outros artigos a respeito das provas de admissão na MGU no livro mencionado, sobretudo o de I. Vardi e A. Vershik. Outra lista de problemas está compilada em *Jewish Problems,* de T. Khovanova e A. Radul. Disponível em: http://goo.gl/pES50J

5. George G. Szpiro, ibid.

Capítulo 4 - Kerosinka

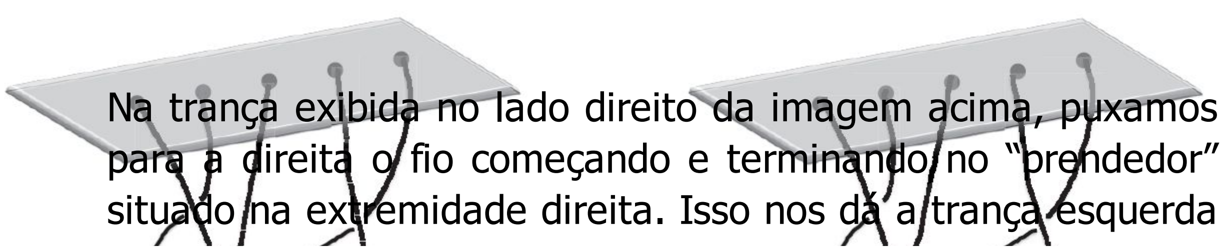
1. Mark Saul, ibid.

Capítulo 5 – Linhas de solução

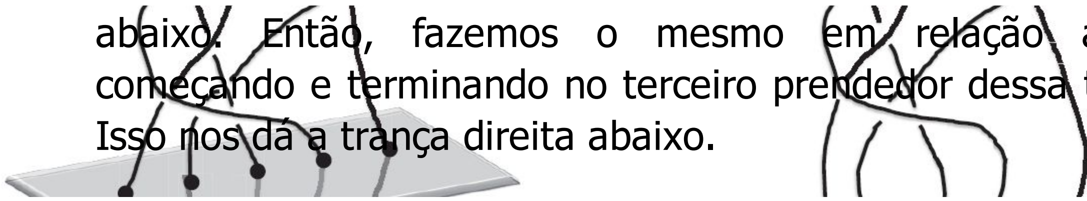
1. A história da Universidade Popular Judaica e as circunstâncias da morte de Bella Muchnik Subbotovskaya são relatadas nos artigos por D. B. Fuchs e outros, em M. Shifman (ed.), *You Failed Your Math Test, Comrade Einstein,* World Scientific, 2005. Ver também George G. Szpiro, ibid.

2. Se colocarmos a trança identidade no alto de outra trança e removermos as placas intermediárias, teremos de volta a trança original após encurtarmos os fios. Isso significa que o resultado da adição de uma trança *b* ea trança identidade é igual à trança *b.*

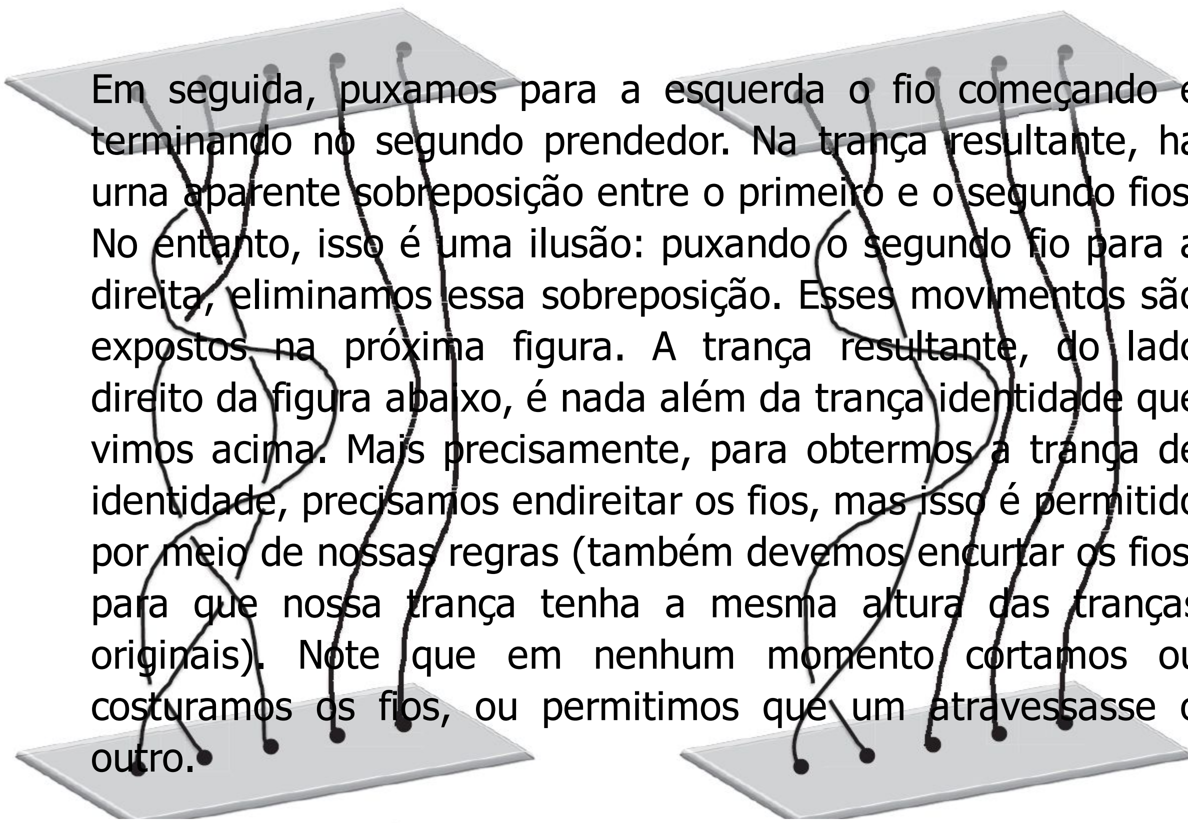
3. Eis o que a adição de uma trança e sua imagem espelhada parecem:

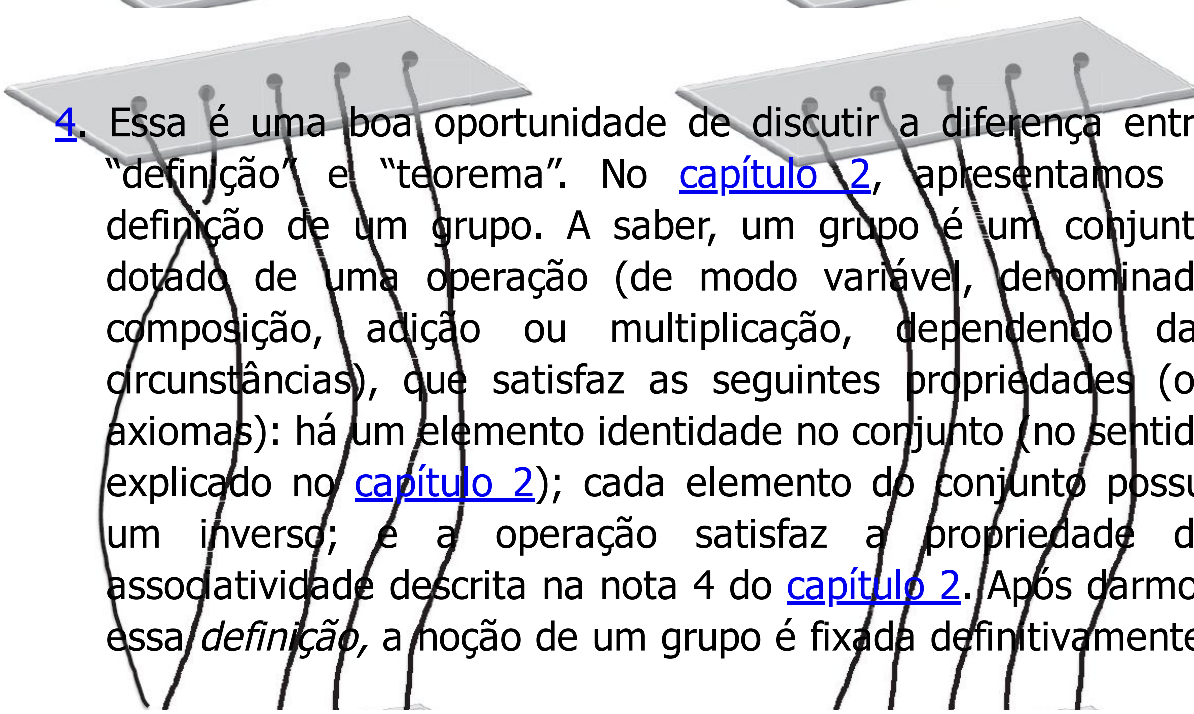


Na trança exibida no lado direito da imagem acima, puxamos para a direita o fio começando e terminando no “prendedor” situado na extremidade direita. Isso nos dá a trança esquerda abaixo. Então, fazemos o mesmo em relação ao fio começando e terminando no terceiro prendedor dessa trança. Isso nos dá a trança direita abaixo.

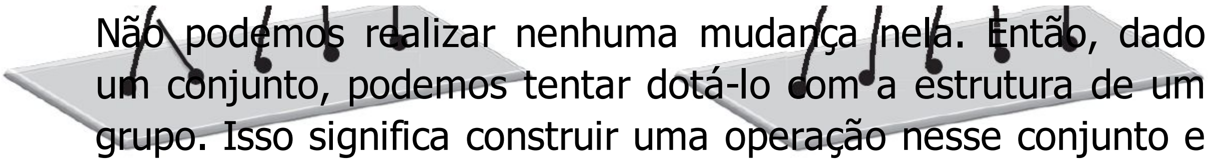


Em seguida, puxamos para a esquerda o fio começando e terminando no segundo prendedor. Na trança resultante, há urna aparente sobreposição entre o primeiro e o segundo fios. No entanto, isso é uma ilusão: puxando o segundo fio para a direita, eliminamos essa sobreposição. Esses movimentos são expostos na próxima figura. A trança resultante, do lado direito da figura abaixo, é nada além da trança identidade que vimos acima. Mais precisamente, para obtermos a trança de identidade, precisamos endireitar os fios, mas isso é permitido por meio de nossas regras (também devemos encurtar os fios, para que nossa trança tenha a mesma altura das tranças originais). Note que em nenhum momento cortamos ou costuramos os fios, ou permitimos que um atravessasse o outro.





4. Essa é uma boa oportunidade de discutir a diferença entre "definição" e "teorema". No capítulo 2, apresentamos a definição de um grupo. A saber, um grupo é um conjunto dotado de uma operação (de modo variável, denominada composição, adição ou multiplicação, dependendo das circunstâncias), que satisfaz as seguintes propriedades (ou axiomas): há um elemento identidade no conjunto (no sentido explicado no capítulo 2); cada elemento do conjunto possui um inverso; e a operação satisfaz a propriedade de associatividade descrita na nota 4 do capítulo 2. Após darmos essa *definição*, a noção de um grupo é fixada definitivamente.



Não podemos realizar nenhuma mudança nela. Então, dado um conjunto, podemos tentar dotá-lo com a estrutura de um grupo. Isso significa construir uma operação nesse conjunto e demonstrar que ela satisfaz todas as propriedades listadas acima. Neste capítulo, consideramos o conjunto de todas as tranças com *n* fios (identificamos as tranças que são obtidas por meio do ajuste dos fios, como explicado no texto principal), e construímos a operação de adição de duas tranças quaisquer pela regra descrita no texto principal. Então, nosso *teorema* é o enunciado de que essa operação satisfaz todas as propriedades acima. A demonstração desse teorema consiste da verificação direta dessas propriedades. Verificamos as duas primeiras propriedades (ver as notas 2 e 3 acima, respectivamente), e a última propriedade (associatividade) resulta automaticamente da construção relativa à adição de duas tranças.

5. Como uma das nossas regras é que um fio não pode se enredar consigo mesmo, o fio único que temos não tem lugar para ir a não ser direto para baixo, a partir do único prendedor situado na placa superior, em direção ao prendedor na placa inferior. Claro que ele pode seguir um caminho complicado, como uma estrada sinuosa de montanha ou uma rua serpenteante, mas, ao encurtá-lo, se necessário, podemos fazer o fio descer verticalmente. Em outras palavras, o grupo B_1 consiste de um único elemento, que é a identidade (também é seu próprio inverso e o resultado da adição consigo mesmo).

6. No jargão matemático, dizemos que “o grupo de tranças B_2 é isomorfo ao grupo de números inteiros”. Isso significa que há uma correspondência de um para um entre os dois grupos – isto é, atribuímos a cada trança o número de sobreposições –

de modo que a adição de tranças (no sentido descrito acima) corresponda à adição usual de números inteiros. De fato, ao colocarmos duas tranças no topo uma da outra, obteremos uma nova trança, em que o número de sobreposições é igual à soma desses números atribuídos às duas tranças originais. Além disso, a trança identidade, na qual não ocorre nenhuma sobreposição de fios, corresponde ao número inteiro 0, e considerar a trança inversa corresponde a considerar o negativo de um número inteiro.

7. Ver David Garber, "Braid group cryptography". Em: Braids: Introductory Lectures on Braids, Configurations and Their Applications, eds. A. Jon Berrick, e.a., pp. 329-403, World Scientific 2010. Disponível em: http://goo.gl/fZqklv

8. Ver, por exemplo, Graham P. Collins, "Computing with Quantum Knots". Em: Scientific American, abril de 2006, pp. 57-63.

9. De Witt Sumners, Claus Ernst, Sylvia J. Spengler e Nicholas R. Cozzarelli, "Analysis of the mechanism of DNA recombination using tangles". Em: Quarterly Reviews of Biophysics, vol. 28, agosto de 1995, pp. 253-313.

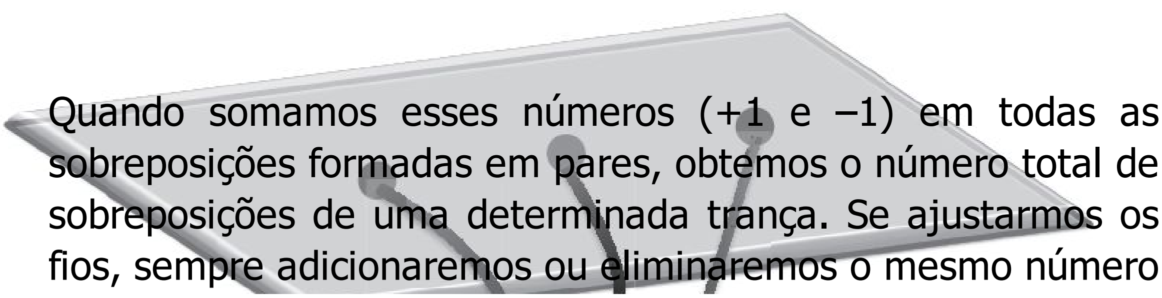
Mariel Vazquez e De Witt Sumners, "Tangle analysis of Gin recombination". Em: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* vol. 136, 2004, pp. 565–582.

10. Um enunciado mais preciso que vamos discutir no capítulo 9 é que o grupo de tranças B_n é o *grupo fundamental* do espaço de n pontos distintos não ordenados no plano. Eis uma interpretação útil das coleções de n pontos distintos não ordenados no plano em termos de polinômios de grau n.

Consideremos a polinômio quadrático mônico $x^2 + a_1x + a_0$, em que a_0 e a_1 são números complexos (nesse caso, "mônico" significa que o coeficiente na frente do termo com a maior potência de x, isto é, x_2, é igual a 1). Possui duas raízes, que são números complexos, e, inversamente, essas raízes determinam unicamente um polinômio quadrático mônico. Os números complexos podem ser representados como pontos no plano (ver o capítulo 9); assim, um polinômio quadrático mônico com duas raízes distintas é igual ao par de pontos distintos no plano.

Da mesma forma, um polinômio mônico de grau n, $x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, com n raízes complexas distintas, é igual à coleção de n pontos distintos no plano - suas raízes. Definamos um polinômio assim: $(x - 1)(x - 2) \ldots (x - n)$, com as raízes 1, 2, 3,..., n. Um caminho no espaço de todos esses polinômios, começando e terminando no polinômio $(x - 1)(x - 2) \ldots (x - n)$, pode ser visualizado como uma trança com n fios, cada fio sendo a trajetória de urna raiz específica. Portanto, descobrimos que o grupo de tranças B_n é o grupo fundamental do espaço dos polinômios de grau n, com raízes distintas (ver o capítulo 14).

11. Para cada sobreposição entre dois fios, atribuiremos +1 se o fio descendo da esquerda passar por baixo do fio descendo da direita; atribuiremos –1 se o oposto for válido. Consideremos, por exemplo, essa trança:



Quando somamos esses números (+1 e –1) em todas as sobreposições formadas em pares, obtemos o número total de sobreposições de uma determinada trança. Se ajustarmos os fios, sempre adicionaremos ou eliminaremos o mesmo número de sobreposições +1 que o número de sobreposições –1, de modo que o número total vai permanecer igual. Isso significa que o total é *bem definido;* não muda quando ajustamos a trança.

12. Note que o número total de sobreposições da trança obtida pela adição de duas tranças será igual à soma dos números totais de suas sobreposições. Portanto, a adição de duas tranças com números totais de sobreposições 0 será novamente uma trança com número total de sobreposições 0. O subgrupo comutador B'_n consiste de todas essas tranças. Num certo modo preciso, é a parte não abeliana máxima do grupo de tranças B_n.

13. O conceito de números de Betti originou-se na topologia, ou seja, o estudo matemático das propriedades importantes das formas geométricas. Os números de Betti de uma determinada forma geométrica, como um círculo ou uma esfera, formam uma sequência de números, b_0, b_1, b_2, …, cada um deles pode ser 0 ou um número natural. Por exemplo, para um espaço plano, como uma linha, um plano etc., $b_0 = 1$, e todos os outros números de Betti são iguais a 0. Em geral, b_0 é o número de componentes conexas da forma geométrica. Para o círculo, $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, e todos os outros números de Betti são 0. O fato de que b_1, o primeiro número de Betti, é igual a 1, reflete a presença de uma peça unidimensional não trivial. Para a esfera, $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, e os outros números de Betti são iguais a 0. Nesse caso, b_2 reflete a presença de uma peça bidimensional não trivial.

Os números de Betti do grupo de tranças B_n são definidos como os números de Betti do espaço do polinômio mônico de grau n, com n raízes distintas. Os números de Betti do subgrupo comutador B'_n são os números de Betti de um espaço rigorosamente afim. Consiste de todos os polinômios mônicos de grau n, com n raízes distintas, e com a propriedade adicional de que seu discriminante (o quadrado do produto das diferenças entre todos os pares de raízes) assume um valor fixo diferente de 0 (por exemplo, podemos dizer que esse valor é 1). Por exemplo, o discriminante do polinômio $x^2 + a_1x + a_0$ é igual a $a_1^2 - 4a_0$, e há uma fórmula similar para todos os n.

Resulta da definição que o discriminante de um polinômio será igual a zero se e somente se tiver raízes múltiplas. Portanto, o discriminante oferece uma aplicação do espaço de todos os polinômios mónicos de grau n, com n raízes distintas, no plano complexo sem o ponto 0. Assim, obtemos uma "fibração" desse espaço, no plano complexo sem a origem. Os números de Betti de B'_n refletem a topologia de quaisquer dessas fibras (topologi-camente, são as mesmas), enquanto os números de Betti de B_n refletem a topologia de todo o espaço. O desejo de entender a topologia das fibras foi o que motivou Varchenko a sugerir esse problema para mim. Para obter mais detalhes dos números de Betti e dos conceitos afins de homologia e cohomologia, você pode consultar os seguintes livros introdutórios:

William Fulton, *Algebraic Topology: A First Course,* Springer, 1995;

Alien Hatcher, *Algebraic Topology,* Cambridge University Press, 2001.

Capítulo 6 - Aprendiz de matemático

1. Algumas pessoas especularam que Fermat pode ter blefado quando deixou aquela anotação na margem da página. Não acho; considero que ele cometeu um erro honesto. Seja como for, devemos ser gratos a ele; sua pequena anotação na margem tem tido um efeito positivo no desenvolvimento da matemática.

2. Mais precisamente, demonstrei que, para cada divisor d de n, o q-ésimo número de Betti, onde $q = n(d - 2)/d$, é igual a $\phi(d)$, e, para cada divisor d de $n - 1$, o q-ésimo número de Betti, onde $q = (n - 1)(d - 2)/d$, é igual a $\phi(d)$. Todos os outros números de Betti de B'_n são iguais a 0.

3. Em 1985, Mikhail Gorbachev chegou ao poder e, pouco depois, implantou sua política da *perestroika.* Até onde sei, a discriminação sistemática contra os candidatos judeus no exame vestibular do *Mekh-Mat* do tipo que eu sofri terminou em torno de 1990.

4. S. Zdravkovska e P. Duren, Golden Years of Moscow Mathematics, American Mathematical Society, 1993, p. 221.

5. O matemático Yuli Ilyashenko sustentou que esse acontecimento foi o catalisador para o estabelecimento das políticas antissemitas no *Mekh-Mat,* na entrevista intitulada "The black 20 years at Mekh-Mat", publicada no site Polit.ru, em 28 de julho de 2009. Disponível on-line, em: http://goo.gl/WnRWbI

6. A questão era descobrir de quantas maneiras alguém pode juntar em pares os lados de um polígono regular com $4n$ lados, para a obtenção de uma superfície de Riemann de gênero n. No capítulo 9, vamos discutir uma maneira

específica de fazer isso quando identificamos os lados opostos do polígono.

7. Edward Frenkel, "Cohomology of the commutator subgroup of the braid group". Em: *Functional Analysis and Applications,* vol. 22, 1988, pp. 248-250.

Capítulo 7 – A Teoria da Grande Unificação

1. Entrevista com Robert Langlands para a Mathematics Newsletter, University of British Columbia (2010). Versão integral disponível on-line em: http://goo.gl/VR5M7z

2. Vamos supor que existam números naturais *m* e *n*, de modo que

$\sqrt{2}$

= *m*/*n*. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que os números *m* e *n* são relativamente primos; isto é, não são divisíveis simultaneamente por qualquer número natural diferente de 1. Caso contrário, teríamos *m* = *dm'* e *n* = *dn'* e, então,

$\sqrt{2}$

= *m'*/*n'*. Esse processo pode ser repetido, se necessário, até alcançarmos dois números que são relativamente primos.

Assim, assumamos que

$\sqrt{2}$

= *m*/*n*, onde *m* e *n* são números relativamente primos. Elevando ao quadrado os dois lados da fórmula

$\sqrt{2}$

= m/n, obtemos $2 = m^2/n^2$. Multiplicando os dois lados por n^2, temos $m^2 = 2n^2$. Isso implica que m é par, pois, se fosse ímpar, então m^2 também seria impar, o que contraditaria essa fórmula.

Se m é par, então $m = 2p$, para algum número natural p. Substituindo isso na fórmula anterior, obtemos $4p^2 = 2n^2$; daí, $n^2 = 2p^2$. No entanto, n também deve ser par, por meio do mesmo argumento que utilizamos para demonstrar que m é par. Portanto, tanto m como n devem ser pares, o que contradiz nossa suposição de que m e n são números relativamente primos. Assim, esses m e n não existem.

Esse é um bom exemplo de uma "prova por contradição". Começamos com o enunciado que é oposto ao que estamos tentando demonstrar (em nosso caso, começamos com o enunciado de que

$\sqrt{2}$

é um número racional, o que é o oposto ao que estamos tentando demonstrar). Se isso implicar em um enunciado falso (em nosso caso, isso implica em tanto m como n serem números pares, ainda que tivéssemos assumido que eram números relativamente primos), então, concluiremos que o enunciado pelo qual começamos também é falso. Portanto, o enunciado que queremos demonstrar (que

$\sqrt{2}$

não é um número racional) é válido. No capítulo 8, voltaremos a utilizar esse método: primeiro, quando discutirmos a demonstração do Último Teorema de Fermat e, depois, na nota 6, quando apresentarmos a demonstração de Euclides de que existe uma infinidade de números primos.

3. Por exemplo, multipliquemos esses dois números: $\frac{1}{2}$ + $\sqrt{2}$ e 3 – $\sqrt{2}$. Simplesmente, abrimos os parênteses:

$$\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)(3 - \sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 3 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}.$$

No entanto, $\sqrt{2}$ · $\sqrt{2}$ = 2; assim, reunindo os termos, obtemos a seguinte resposta:

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

É um número da mesma forma e, assim, pertence ao nosso novo sistema numérico.

4. Só consideramos as simetrias de nosso sistema numérico que são compatíveis com as operações de adição e multiplicação, e de maneira que 0 corresponde a 0, 1 corresponde a 1, inverso aditivo corresponde a inverso aditivo, e inverso multiplicativo corresponde a inverso multiplicativo. No entanto, se 1 corresponder a 1, então 2 = 1 + 1 deverá corresponder a 1 + 1 = 2. Da mesma forma, todos os números naturais devem ser preservados, e, então, também seus inversos negativos e multiplicativos. Portanto, todos os números racionais são preservados por essas simetrias.

5. É fácil verificar se essa simetria é realmente compatível com adição, subtração, multiplicação e divisão. Façamos isso para a operação de adição. Consideremos dois números diferentes do nosso novo sistema numérico:

$$x + y\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad x' + y'\sqrt{2},$$

Onde *x, y, x'* e *y'* são números racionais. Vamos adicioná-los:

$$\left(x + y\sqrt{2}\right) + \left(x' + y'\sqrt{2}\right) = (x + x') + (y + y')\sqrt{2}.$$

Podemos aplicar nossa simetria para cada um deles. Então, obtemos:

$$x - y\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad x' - y'\sqrt{2},$$

Agora, vamos adicionar esses:

$$\left(x - y\sqrt{2}\right) + \left(x' - y'\sqrt{2}\right) = (x + x') - (y + y')\sqrt{2}.$$

Observamos que o número que obtemos é igual ao número obtido aplicando nossa simetria à soma original:

$$(x + x') + (y + y')\sqrt{2} \quad \mapsto \quad (x + x') - (y + y')\sqrt{2}.$$

Em outras palavras, podemos aplicar a simetria para cada um dos dois números individualmente e, em seguida, somá-los. Ou podemos primeiro somá-los e, depois, aplicar a simetria. O resultado será o mesmo. Isso é que queremos dizer afirmando que nossa simetria é *compatível* com a operação de adição. Da mesma forma, podemos verificar se nossa simetria é compatível com as operações de subtração, multiplicação e divisão.

6. Por exemplo, no caso do corpo numérico obtido ao juntar

$\sqrt{2}$

aos números racionais, o grupo de Galois consiste de duas simetrias: a de identidade e a simetria que troca

$\sqrt{2}$

e –

$\sqrt{2}$

. Denotemos a identidade por *I* ,ea simetria que troca

$\sqrt{2}$

e –

$\sqrt{2}$

, por *S.* Registremos explícitamente quais são as composições dessas simetrias:

$$I \circ I = I, \quad I \circ S = S, \quad S \circ I = S,$$

e a mais interessante:

$$S \circ S = I.$$

De fato, se trocarmos

$\sqrt{2}$

e –

$\sqrt{2}$

e, em seguida, fizermos isso de novo, o resultado líquido será a identidade:

$$x + y\sqrt{2} \quad \mapsto \quad x - y\sqrt{2} \quad \mapsto \quad x - (-y\sqrt{2}) = x + y\sqrt{2}.$$

Agora, descrevemos completamente o grupo de Galois desse corpo numérico: consiste de dois elementos, *I* e *S*, e suas composições são dadas pelas fórmulas acima.

7. Alguns anos antes, Niels Henrik Abel demonstrou que havia uma equação quíntica que não podia ser resolvida por radicais (Joseph-Louis Lagrange e Paolo Ruffini também fizeram contribuições importantes). No entanto, a demonstração de Galois foi mais genérica e mais conceituai. Para obter mais detalhes a respeito dos grupos de Galois e da rica história da solução de equações polinomiais, ver Mario Livio, *The Equation Wat Couldn't Be Solved,* Simon & Schuster, 2005.

8. Em um ampio sentido, consideremos a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, com coeficientes racionais a, b e c. Suas soluções x_1 e x_2 são dadas pelas fórmulas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se o discriminante $b^2 - 4ac$ não for o quadrado de um número racional, então essas soluções não serão números racionais. Portanto, se juntarmos x_1 e x_2 aos números racionais, obteremos um novo corpo numérico. O grupo de simetrias desse corpo numérico também consiste de dois elementos: a identidade e a simetria que troca as duas soluções, x_1 e x_2. Em outras palavras, essa simetria troca $\sqrt{b^2 - 4ac}$ e $-\sqrt{b^2 - 4ac}$.

No entanto, não precisamos registrar fórmulas explícitas das soluções para descrever esse grupo de Galois. De fato, como o grau do polinômio é 2, sabemos que existem duas soluções; assim, denotemos simplesmente por x_1 e x_2. Então, temos

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Abrindo os parênteses, verificamos que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, de modo que $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$. Também temos $(x_1)^2 = -\frac{c + bx_1}{a}$, pois x_1 é a solução da equação acima. Portanto, se o discriminante não for o quadrado de um número racional, então o corpo numérico obtido juntando x_1 e x_2 aos números racionais consistirá de todos os números da forma $\alpha + \beta x_1$, onde α e β são os dois números racionais. Sob a simetria que troca x_1 e x_2, o número $\alpha + \beta x_1$ corresponde a

$$\alpha + \beta x_2 = \left(\alpha - \beta\frac{b}{a}\right) - \beta x_1.$$

Essa simetria é compatível com as operações de adição etc., pois x_1 e x_2 resolvem a mesma equação com coeficientes racionais. Obtemos que o grupo de Galois desse corpo numérico consiste da identidade e da simetria que troca x_1 e x_2. Volto a enfatizar que não utilizamos nenhum conhecimento, seja qual for, a respeito de como expressar x_1 e x_2 em termos de a, b e c.

9. Para ilustrar esse ponto, consideremos, por exemplo, a equação $x^3 = 2$. Uma de suas soluções é a raiz cúbica de 2,

$\sqrt[3]{2}$

. Há duas outras soluções, que são números complexos:

$\sqrt[3]{2}\omega$

e

$\sqrt[3]{2}\omega$

^{2} nas quais

$$1 \quad \sqrt{3}$$

(Ver a discussão a respeito de números complexos no capítulo 9.) O menor corpo numérico contendo essas três soluções deve também conter seus quadrados: $\sqrt[3]{4} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$ $\sqrt[3]{4}\omega$, e $\sqrt[3]{4}\omega^2$ (seus cubos são iguais a 2), assim como suas proporções: ω e ω^2. Assim, parece que para construir esse corpo numérico, temos de juntar oito números aos números racionais. No entanto, temos a relação:

$$1+\omega+\omega^2 = 0,$$

que nos permite expressar ω^2 em termos de 1 e ω:

$$\omega^2 = -1 - \omega.$$

Portanto, também temos

$$\sqrt[3]{2}\omega^2 = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{4}\omega^2 = -\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\omega.$$

Logo, para obtermos nosso corpo numérico, precisamos somente juntar cinco números aos números racionais: ω,

$\sqrt[3]{2}$

,

$\sqrt[3]{2}\omega$

,

$\sqrt[3]{4}$

e

$\sqrt[3]{4}\omega$

. Assim, um elemento geral desse corpo numérico, denominado corpo de decomposição da equação $x^3 = 2$, será uma combinação de seis termos: um número racional mais um número racional vezes ω mais um número racional vezes

$\sqrt[3]{2}$

, e assim por diante. Compare isso com o corpo de decomposição da equação $x^2 = 2$, cujos elementos possuem dois termos: um número racional mais um número racional vezes

$\sqrt{2}$

.

Observamos acima que os elementos do grupo de Galois do corpo de decomposição de equações $x^2 = 2$ permutam as duas soluções dessa equação,

$\sqrt{2}$

e –

$\sqrt{2}$

. Há duas dessas permutações: aquela que troca as duas soluções e a identidade.

Da mesma forma, para qualquer outra equação com coeficientes racionais, definimos seu corpo de decomposição como o corpo obtido juntando todas as suas soluções aos números racionais. Por meio do mesmo argumento da nota 4 acima, qualquer simetria desse corpo numérico compatível com as operações de adição e multiplicação preserva os números racionais. Portanto, nessa simetria, qualquer solução da equação deve corresponder para outra solução. Então, obtemos a permutação dessas soluções. No caso da equação $x^3 = 2$, há três soluções listadas acima. Em cada permutação, a primeira,

$\sqrt[3]{2}$

, corresponde a qualquer uma das três soluções; a segunda,

$\sqrt[3]{2}\omega$

, corresponde a uma das duas soluções restantes; e a terceira,

$\sqrt[3]{2}\omega$

^{2}, deve corresponder a única solução restante (uma permutação deve ser de um para um, a fim de ter uma inversa). Portanto, há 3 · 2 = 6 permutações possíveis dessas três soluções. Essas permutações formam um grupo, e se constata que esse grupo está em correspondência de um para um com o grupo de Galois do corpo de decomposição da equaçao $x^3 = 2$. Portanto, obtemos uma descrição explícita do grupo de Galois em termos da permutação das soluções.

No cálculo acima, utilizamos fórmulas explícitas para as soluções da equação. No entanto, um argumento similar pode ser formulado para uma equação cúbica arbitrária com coeficientes racionais, e não precisamos de uma fórmula para suas soluções em termos de coeficientes. O resultado é o seguinte: denotemos as soluções da equação por x_1, x_2 e x_3. Vamos assumir que todas elas são irracionais. No entanto, é fácil perceber que o discriminante da equação, definido como

$$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_2)^2,$$

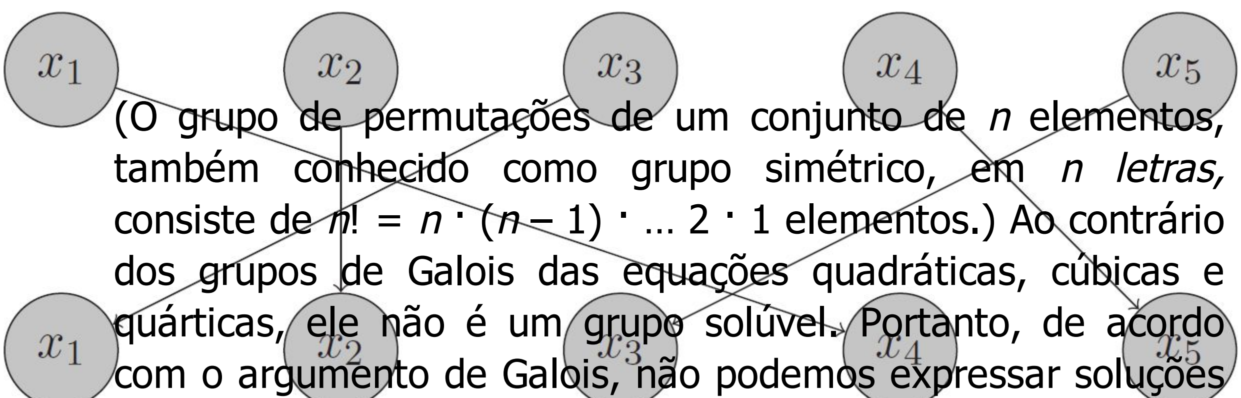
sempre é um número racional. Acontece que, se a raiz quadrada não for um número racional, então o grupo de Galois do corpo em decomposição dessa equação será o grupo de todas as permutações dessas soluções (consiste, então, de seis elementos). Se a raiz quadrada do discriminante for um número racional, então o grupo de Galois consistirá de três permutações: a identidade, a permutação cíclica

$$x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_1$$

, e sua inversa.

10. Por exemplo, não é difícil demonstrar que, para uma típica equação quíntica (isto é, uma com $n = 5$), para a qual temos cinco soluções, o grupo de Galois é o grupo de todas as permutações desses cinco números. Uma permutação é um rearranjo de um para um desses números, como o exibido na figura abaixo.

Nessa permutação, a solução x_1 corresponde a qualquer uma das cinco (possivelmente a si mesma); assim, temos cinco alternativas. Então, x_2 corresponde a uma das quatro soluções restantes; x_3 corresponde a uma das três restantes, e assim por diante. Portanto, no total, existem $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ permutações, e, assim, o grupo de Galois consiste de 120 elementos.



(O grupo de permutações de um conjunto de n elementos, também conhecido como grupo simétrico, em *n letras,* consiste de $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots 2 \cdot 1$ elementos.) Ao contrário dos grupos de Galois das equações quadráticas, cúbicas e quárticas, ele não é um grupo solúvel. Portanto, de acordo com o argumento de Galois, não podemos expressar soluções da equação quíntica geral em termos de radicais.

11. Está disponível no site do Instituto de Estudos Avançados de Princeton: http://goo.gl/CiINF6

12. Citado a partir da imagem disponível em Advanced Study Digital Collections: http://goo.gl/P5Akx2

Capítulo 8 - Números mágicos

1. Robert Langlands, "Is there beauty in mathematical theories?". Em: *The Many Faces of Beauty,* ed. Vittorio Hõsle, University of Notre Dame Press, 2013. Disponível em: http://goo.gl/1STVD7

2. Para obter mais detalhes a respeito de conjecturas, ver esse artigo revelador: de Barry Mazur, "Conjecture". Em: *Synthése,* vol. 111, 1997, pp. 197–210.

3. Para obter mais detalhes a respeito da história do Último Teorema de Fermat, ver, de Simon Singh, *Fermat's Enigma: the Epic Quest to Solve the World's Greatest Mathematical Problem,* Anchor, 1998.

4. Ver Andrew Wiles, "Modular elliptic curves and Fermat's last theorem". Em: *Annals of Mathematics,* vol. 141, 1995, pp. 443–551; De Richard Taylor e Andrew Wiles, "Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras". Em: *Annals of Mathematics,* vol. 141, 1995, 553–572.

   Eles demonstraram a conjectura de Shimura-Taniyama-Weil no caso mais típico (o assim chamado semiestável), que acabou se revelando suficiente para resolver o Último Teorema de Fermat. Alguns anos depois, os casos restantes da conjectura foram demonstrados por C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond e R. Taylor.

   Como já está demonstrado, seria mais correto se referir à conjectura de Shimura–Taniyama–Weil como um teorema. E, de fato, agora muitos matemáticos se referem a ela como o "teorema da modularidade". Mas os velhos hábitos demoram a morrer, e alguns matemáticos, como eu, ainda utilizam seu antigo nome. Ironicamente, o Último Teorema de Fermat sempre foi chamado de teorema, embora fosse, de fato, uma conjectura. Sem dúvida, inicialmente isso ocorreu em respeito à afirmação de Fermat de que ele tinha encontrado uma prova.

5. Se N não for um número primo, então poderemos anotar $N = xy$, para dois números naturais x e y entre 1 e $N - 1$. Então, x não tem um módulo N inverso multiplicativo. Em outras palavras, não existe uma número natural z entre 1 e $N - 1$ de modo que

$$xz = 1 \qquad \text{módulo } N.$$

De fato, se essa igualdade fosse satisfeita, multiplicaríamos ambos os lados por y, e obteríamos

$$xyz = y \qquad \text{módulo } N.$$

Mas $xy = N$; assim, o lado esquerdo é $N z$, o que significa que y é divisível por N. No entanto, y não pode estar entre 1 e $N - 1$.

6. A demonstração atribuída a Euclides ocorre da maneira descrita a seguir. Aplicamos o método da "prova por contradição", que já utilizamos neste capítulo quando discutimos a demonstração do Último Teorema de Fermat.

Vamos supor que há somente uma finidade de números primos: P_1, P_2,…, P_N. Tomemos o número A obtido considerando seu produto e adicionando 1; isto é, conjunto $A = P_1P_2\ldots\ P_N + 1$. Afirmo que é um número primo. Provamos isso por contradição: se não for um número primo, então será divisível por um número natural diferente de 1 e de si mesmo. Portanto, *A* deve ser divisível por um dos números primos; digamos por p_i. No entanto, se *A* for divisível por p_i, então A = 0 módulo p_i, enquanto segue da definição de *A* que A = 1 módulo p_i.

Chegamos numa contradição. Isso significa que *A* não é divisível por qualquer número natural diferente de 1 e de si mesmo. Portanto, *A* é em si um número primo.

No entanto, como *A* é, sem dúvida, maior que qualquer dos números $P_1, P_2,\ldots, P_N$, isso contradiz nossa suposição de que $P_1, P_2,\ldots, P_N$ eram os únicos números primos. Portanto, nossa afirmação inicial de que havia apenas uma finidade de números primos é falsa. Logo, há uma infinidade de números primos.

7. Expliquemos isso: num sistema numérico específico, um inverso multiplicativo de um número *a* é um número *b*, de modo que $a \cdot b = 1$. Assim, por exemplo, no sistema numérico de números racionais, o inverso multiplicativo do número racional 3/4 é 4/3. No sistema numérico que estamos considerando agora, o inverso de uma número natural *a* entre 1 e $p - 1$ é outro número natural *b* no mesmo intervalo, de modo que

$$a \cdot b = 1 \qquad \text{módulo } p.$$

Independentemente do sistema numérico que consideramos, o número 0, a identidade aditiva, jamais tem um inverso multiplicativo. É por isso que o excluimos.

8. Eis a demonstração. Selecionemos um número natural *a* entre l e $p - 1$, onde *p* é um número primo. Multipliquemos *a* por todos os outros números *b* nesse intervalo e consideremos o resultado módulo *p*. Compilaremos uma tabela consistindo de duas colunas: na primeira, ficará o número *b*, e, na segunda, ficará o número $a \cdot b$ módulo *p*.

Por exemplo, se $p = 5$ e $a = 2$, essa tabela será a seguinte:

1	2
2	4
3	1
4	3

Observamos de imediato que cada um dos números 1, 2, 3 e 4 aparece na coluna exatamente uma vez. O que acontece quando multiplicamos por 2 é que obtemos o mesmo conjunto de números, mas eles são permutados de um determinado modo. Em particular, o número 1 aparece na terceira linha. Isso significa que, quando multiplicamos 3 por 2, obtemos 1 módulo 5. Em outras palavras, 3 é o inverso de 2 se efetuarmos aritmética módulo 5.

O mesmo fenômeno é válido em geral: se compilarmos uma tabela como a acima para qualquer número primo *p* e qualquer número *a* da lista 1,2,..., $p - 1$, então cada um dos números 1,2,..., $p - 1$ aparecerá na coluna direita exatamente uma vez.

Demonstremos isso voltando a empregar o truque da prova por contradição: vamos supor que esse não seja o caso. Então, um dos números do conjunto 1, 2,..., $p - 1$, chamemos o mesmo de *n*, tem de aparecer na coluna direita ao menos duas vezes. Isso significa que há dois números do conjunto 1, 2,..., $p - 1$, chamemos os mesmos de c_1 e c_2 (vamos supor que $c_1 > c_2$), de modo que

$$a \cdot c_1 = a \cdot c_2 = n \text{ módulo } p.$$

No entanto, temos

$$a \cdot c_1 - a \cdot c_2 = a \cdot (c_1 - c_2) = 0 \text{ módulo } p.$$

A última fórmula significa que $a \cdot (c_1 - c_2)$ é divisível por p. Mas isso é impossível, porque p é um número primo, e tanto a como $c_1 - c_2$ são do conjunto $\{1,2,\ldots, p-1\}$.

Concluímos que, na coluna direita de nossa tabela, cada um dos números 1, 2,…, $p - 1$ aparece não mais do que uma vez. Contudo, como existem exatamente $p - 1$ desses números, e temos o mesmo número de linhas em nossa tabela, $p - 1$, a única possibilidade de isso acontecer é que cada número apareça exatamente uma vez. No entanto, o número 1 tem de aparecer em algum lugar na coluna direita e exatamente uma vez. Seja b o número correspondente na coluna esquerda. No entanto, temos

$$a \cdot b = 1 \text{ módulo } p.$$

Isso completa a demonstração.

9. Por exemplo, podemos dividir 4 por 3 no corpo finito de 5 elementos:

$$4/3 = 4 \cdot 3^{-1} = 4 \cdot 2 = 8 \quad \text{módulo} \quad 5$$
$$= 3 \quad \text{módulo} \quad 5$$

(nesse caso, utilizamos o fato de que 2 é o inverso multiplicativo de 3 módulo 5).

10. Observemos que, para qualquer número a cujo valor absoluto é menor que 1, temos

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots = \frac{1}{1-a},$$

o que é fácil demonstrar multiplicando ambos os lados por $1 - a$. Usando essa identidade, e denotando $(q + q^2)$ por a, podemos reescrever a função geradora para os números de Fibonacci

$$q\,(1 + (q + q^2) + (q + q^2)^2 + (q + q^2)^3 + \cdots)$$

como

$$\frac{q}{1 - q - q^2}.$$

Em seguida, escrevendo $1 - q - q^2$ como produto de fatores lineares, verificamos que

$$\frac{q}{1 - q - q^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}q\right)^{-1} - \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}q\right)^{-1}\right).$$

Voltando a usar a identidade acima, com

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}q$$

Verificamos que o coeficiente em frente de q^n, em nossa função geradora (que é F_n) é igual a

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Portanto, obtemos uma fórmula fechada para o enésimo número de Fibonacci, que é independente dos precedentes.

Note que o número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que aparece nessa fórmula, é a assim chamada *proporção áurea.* Vem da fórmula acima, na qual a proporção F_n/F_{n-1} tende à proporção áurea quando n se torna maior. Para obter mais detalhes acerca da proporção áurea e dos números de Fibonacci, ver *The Golden Ratio,* de Mario Livio, livro de 2003, da Broadway.

11. Sigo a apresentação desse resultado dada em Richard Taylor, "Modular arithmetic: driven by inherent beauty and human

curio-sity". Em: The Letter of the Institute for Advanced Study, verão de 2012, pp. 6–8. Agradeço a Ken Ribet pelos comentários úteis. De acordo com o livro *Dirichlet Series and Automorphic Forms,* Springer-Verlag, 1971, de autoria de André Weil, a equação cúbica que estamos discutindo neste capítulo foi apresentada por John Tate, depois de Robert Fricke.

12. Esse grupo é um dos assim chamados "subgrupos de congruência" do grupo denominado SL_2

$(\mathbb{Z})$

, que consiste de matrizes 2 × 2, com coeficientes de números inteiros e com o determinante 1; isto é, os arranjos de números inteiros

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

De modo que *ad* − *bc* = 1. A multiplicação das matrizes é dada pela fórmula padrão

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

Então, qualquer número complexo *q* dentro do disco unitário pode ser escrito como

$e^{2\pi\tau\sqrt{-1}}$

, para algum número complexo *τ*, cuja parte imaginária é positiva:

$\tau = x + y\sqrt{-1}$

, onde *y* > 0 (ver a nota 12 do capítulo 15). O número *q* é determinado unicamente por *τ*, e vice-versa. Portanto, podemos descrever a ação do grupo SL_2

$(\mathbb{Z})$

em q descrevendo a ação correspondente em τ. O último é dado pela seguinte fórmula:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

O grupo SL_2

$(\mathbb{Z})$

(mais precisamente, seu quociente por meio do subgrupo de dois elementos, que consiste na matriz identidade I e na matriz $-I$) é o grupo de simetrias do disco dotado de uma métrica não euclidiana específica chamada de modelo do disco de Poincaré. Nossa função é uma forma modular de "peso 2", que significa que é invariável sob a ação acima de um subgrupo de congruência de SL_2

$(\mathbb{Z})$

, no disco, se corrigirmos essa ação multiplicando a função pelo fator $(c\tau + d)^2$.

Ver, por exemplo, Henri Darmon, "A proof of the full Shimura–Taniyama–Weil conjecture is announced". Em: *Notices of the American Mathematical Society,* vol. 46, dezembro de 1999, pp. 1397–1401. Disponível on-line, em: http://goo.gl/YorgdN

13. Essa figura foi criada por Lars Madsen e é publicada com sua permissão. Agradeço a Ian Agol por indicá-la para mim e pela proveitosa discussão.

14. Ver, por exemplo, de Neal Koblitz, "Elliptic curve cryptosystems". Em: Mathematics of Computation, vol. 49, 1987, pp. 203–209; e, de I. Blake, G. Seroussi e N. Smart,

Elliptic Curves in Cryptography, Cambridge University Press, 1999.

15. Em geral, isso é válido para uma finidade de números primos. Também há um par adicional de invariáveis ligadas à equação cúbica (o assim chamado condutor) e à forma modular (o assim chamado nível), e essas invariáveis também são preservadas nessa correspondência. Por exemplo, no caso da equação cúbica que consideramos, as duas invariáveis são iguais a 11. Também noto que todas as formas modulares que aparecem aqui têm o termo constante zero, o coeficiente b_1 na frente de q é igual a 1, e todos os outros coeficientes b_n com $n > 1$ são determinados pelo b_p correspondente aos números primos p.

16. Isto é, se *a, b,* and *c* resolvem a equação de Fermat $a^n + b^n = c^n$, na qual n é um número primo ímpar, então consideremos, de acordo com Yves Hellegouarch e Gerhard Frey, a equação cúbica

$$y^2 = x(x - a^n)(x + b^n).$$

Ken Ribet demonstrou (seguindo a sugestão de Frey e alguns resultados parciais obtidos por Jean-Pierre Serre) que essa equação não consegue satisfazer a conjectura de Shimura–Taniyama–Weil. Juntamente com o caso $n = 4$ (que foi demonstrado pelo próprio Fermat), isso implica o Último Teorema de Fermat. De fato, qualquer número inteiro $n > 2$ pode ser escrito como um produto $n = mk$, onde m é 4 ou um número primo ímpar. Portanto, a ausência de soluções para a equação de Fermat para esse m implica sua ausência para todo $n > 2$.

17. Goro Shimura, “Yutaka Taniyama and his time. Very personal recollections”. Em: Bulletin of London Mathematical Society, vol. 21, 1989, p. 193.

18. Ibid., p. 190.

19. Ver a nota de rodapé, nas pp. 1302–103, no seguinte artigo sobre a rica história da conjectura: Serge Lang, “Some history of the Shimura–Taniyama conjecture”. In: Notices of the American Mathematical Society, vol. 42, 1995, pp. 1301–1307. Disponível on-line, em: http://goo.gl/CTzKLh

Capítulo 9 – Pedra de Roseta

1. *The Economist*, 20 de agosto de 1998, p. 70.

2. As figuras das superfícies de Riemann deste livro foram criadas com o software *Mathematica*®, utilizando o código gentilmente cedido por Stan Wagon. Para obter mais detalhes, ver seu livro: Stan Wagon, Mathematica® in Action: Problem Solving Through Visualization and Computation, Springer-Verlag, 2010.

3. Essa não é uma definição precisa, mas dá a percepção correta dos números reais. Para obter uma definição precisa, devemos considerar cada número real como o limite de uma sequência convergente de números racionais (também conhecida como sequência de Cauchy); por exemplo, os truncamentos da expansão décima infinita de

$\sqrt{2}$

produz essa sequência.

4. Para fazer isso, marque um ponto no círculo e coloque o círculo sobre a linha, de modo que esse ponto marcado toque o ponto 0 na linha. Em seguida, gire o círculo para a direita até o ponto marcado no círculo tocar novamente a linha (isso acontecerá depois de o círculo completar um giro completo). Esse ponto de contato corresponderá a π.

5. A geometría dos números complexos (e outros sistemas numéricos) é explicada muito bem em *Imagining Numbers*, de Barry Mazur, da Picador, 2004.

6. Mais precisamente, obtemos a superfície da rosca sem um ponto. Esse ponto extra corresponde à "solução infinita", em que x e y tendem ao infinito.

7. Para obtermos uma superfície de Riemann de gênero g, devemos pôr um polinômio em x de grau $2g + 1$ no lado direito da equação.

8. Essa ligação entre álgebra e geometria foi um *insight* profundo de René Descartes, descrito inicialmente em *La Géométrie*, no apêndice de seu livro *Discurso sobre o método*, publicado em 1637. Eis o que E. T. Bell escreveu a respeito do método de Descartes: "Agora vem o poder real de seu método. *Começamos com as equações de qualquer grau desejado ou sugerido de complexidade e interpretamos suas propriedades algébricas e analíticas de modo geométrico… Doravante, a álgebra e a análise serão nossos navegadores nos mares desconhecidos do 'espaço' e de sua 'geometria'".* (E. T. Bell, *Men of Mathematics*, Touchstone, 1986, p. 54). Note, porém, que o método de Descartes aplica-se a soluções de equações de números reais, enquanto, neste capítulo, estamos

interessados nas soluções de corpos finitos e de números complexos.

9. Por exemplo, no capítulo 8, tomamos conhecimento que a equação cúbica $y^2 + y = x^3 - x^2$ possui quatro soluções módulo 5. Assim, ingenuamente, a curva correspondente sobre o corpo finito de 5 elementos possui 4 pontos. No entanto, na realidade, há mais estrutura, pois também podemos considerar soluções com valores em diversas extensões do corpo finito de 5 elementos; por exemplo, o corpo obtido com a junção das soluções da equação $x^2 = 2$, que discutimos na nota 8 do capítulo 14. Esses corpos estendidos possuem 5*n* elementos, para $n = 2,3,4,\ldots$, e, assim, obtemos uma hierarquia de soluções com valores nesses corpos finitos.

As curvas correspondentes às equações cúbicas são denominadas "curvas elípticas".

10. *The Bhagavad-Gita, Krishna's Counsel in Time of War*, traduzido por Barbara Stoler Miller, Bantam Classic, 1986.

É interessante notar que Weil passou dois anos na Índia, no início dos anos 1930, e, segundo ele mesmo, foi influenciado pela religião hindu.

11. Ver, por exemplo, "Hindu Avatāra and Christian Incarnation: A comparison", de Noel Sheth. Em: *Philosophy East and West*, vol. 52, No. l, pp. 98–125.

12. André Weil, Collected Papers, vol. I, Springer-Verlag, 1979, p. 251 (tradução minha).

13. Ibid., p. 253. A ideia é que, dada uma curva sobre um corpo finito, consideramos as assim chamadas funções racionais nela. Essas funções são proporções de dois polinômios (note que essa função possui um "polo" – isto é, seu valor é indefinido – em cada ponto da curva na qual o polinômio que aparece no denominador possui um zero). Constata-se que o conjunto de todas as funções racionais numa dada curva é análogo em suas propriedades ao conjunto de números racionais, ou a um corpo numérico mais geral, como aqueles que discutimos no capítulo 8.

Para explicar isso com mais precisão, consideremos as funções racionais nas superfícies de Riemann; a analogia ainda será válida. Por exemplo, vamos analisar a esfera. Utilizando a projeção estereográfica, podemos visualizá-la como uma união de um ponto e do plano complexo (podemos considerar o ponto extra como um ponto que representa o infinito). Denotemos por $t = r + s$

$$\sqrt{-1}$$

a coordenada no plano complexo. Então, cada polinômio $P(t)$ com coeficientes complexos é uma função no plano. Esses polinômios são os análogos dos números inteiros que aparecem na teoria dos números. Uma função racional na esfera é a proporção de dois polinômios $P(t)/Q(t)$, sem fatores comuns. Essas funções racionais são análogas dos números racionais, que são proporções m/n de números inteiros sem fatores comuns. Da mesma forma, funções racionais numa superfície de Riemann mais geral são análogas de elementos de um corpo numérico mais geral.

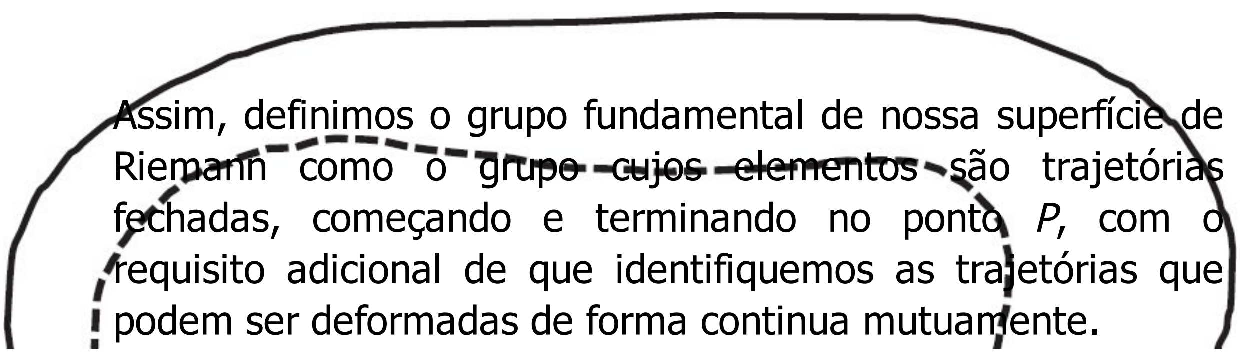
O poder dessa analogia reside no fato de que, para muitos resultados a respeito de corpos numéricos, existirão resultados similares válidos para as funções racionais em curvas sobre corpos finitos, e vice-versa. Às vezes, é mais fácil reconhecer e/ou demonstrar um enunciado específico para um deles. Então, a analogia nos indicará que um enunciado similar deve ser válido para o outro. Esse foi um dos veículos utilizados por Weil e outros matemáticos para produzir novos resultados.

14. Ibid., p. 253. Nesse caso, utilizo a tradução de Martin H. Krieger, em *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 52, 2005, p. 340.

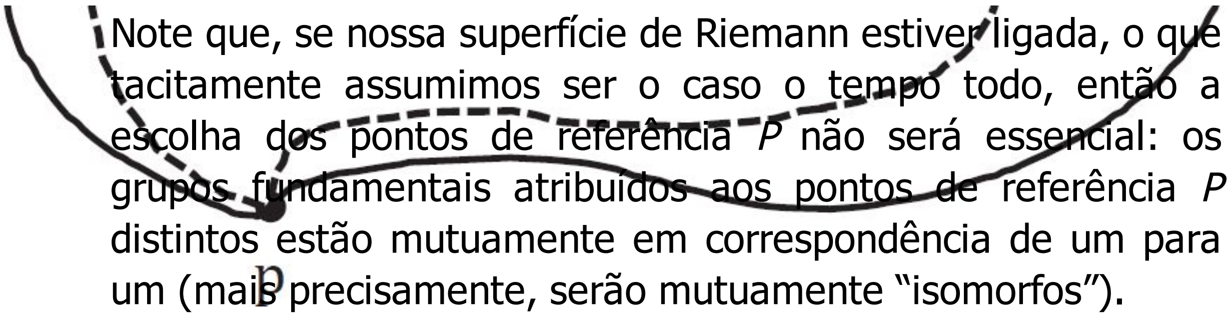
15. Existiam três conjecturas de Weil, que foram demonstradas por Bernard Dwork, Alexander Grothendieck e Pierre Deligne.

16. Há uma redundância nessa definição. Para explicar isso, consideremos duas trajetórias no plano exibidas na figura abaixo, uma cheia e uma pontilhada. É evidente que uma delas pode ser deformada continuamente na outra sem ruptura. É razoável e econômico declarar iguais duas trajetórias fechadas, que podem ser deformadas mutuamente dessa maneira. Nesse caso, reduzimos drasticamente o número de elementos em nosso grupo.

De fato, essa regra é similar à que utilizamos na definição dos grupos de tranças, no capítulo 5. Ali, também declaramos iguais duas tranças que podiam ser deformadas (ou "ajustadas") mutuamente sem corte e costura dos fios.



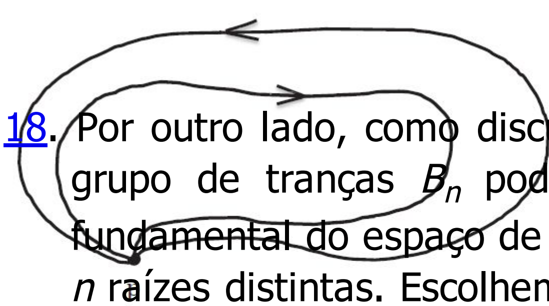
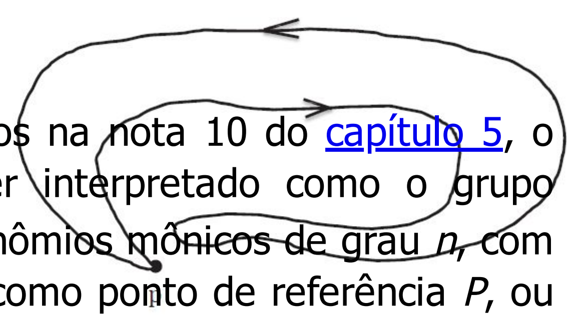
Assim, definimos o grupo fundamental de nossa superfície de Riemann como o grupo cujos elementos são trajetórias fechadas, começando e terminando no ponto *P*, com o requisito adicional de que identifiquemos as trajetórias que podem ser deformadas de forma continua mutuamente.



Note que, se nossa superfície de Riemann estiver ligada, o que tacitamente assumimos ser o caso o tempo todo, então a escolha dos pontos de referência P não será essencial: os grupos fundamentais atribuídos aos pontos de referência P distintos estão mutuamente em correspondência de um para um (mais precisamente, serão mutuamente "isomorfos").

17. O elemento identidade será a "trajetória constante". Ele nunca deixa o ponto marcado P. De fato, é instrutivo pensar a respeito de cada trajetória fechada como uma trajetória de uma partícula, começando e terminando no mesmo ponto P. A trajetória constante é a trajetória da partícula que simplesmente permanece no ponto P. É evidente que, se adicionarmos qualquer percurso à trajetória constante no sentido descrito no texto principal, teremos de volta a trajetória original.

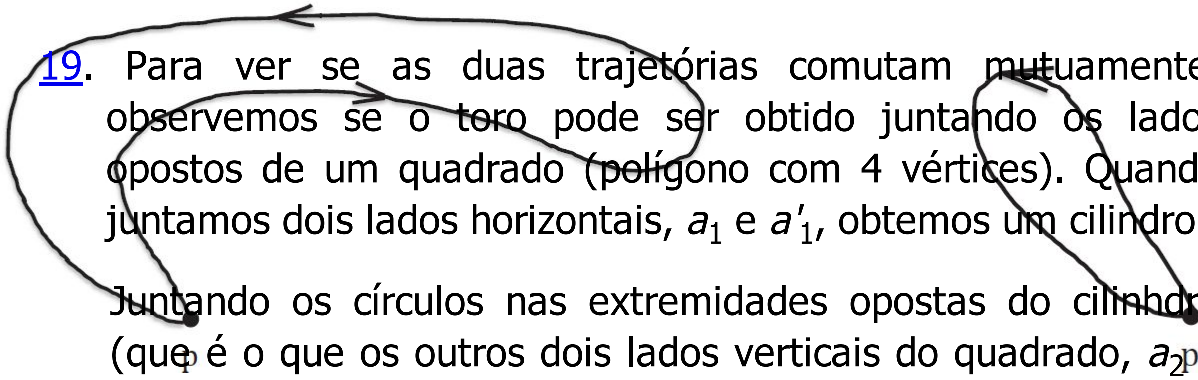
A trajetória inversa de outra será a mesma trajetória, mas percorrida na direção oposta. Para verificar se é realmente inversa, adicionemos uma trajetória e sua inversa. Obtemos uma nova trajetória, que percorre a mesma rota duas vezes, mas em duas direções opostas. Continuamente, podemos deformar essa nova trajetória "dupla" numa trajetória constante. Em primeiro lugar, ajustamos levemente uma das duas trajetórias. A trajetória resultante pode ser contraída num ponto, como exposto nas figuras abaixo.

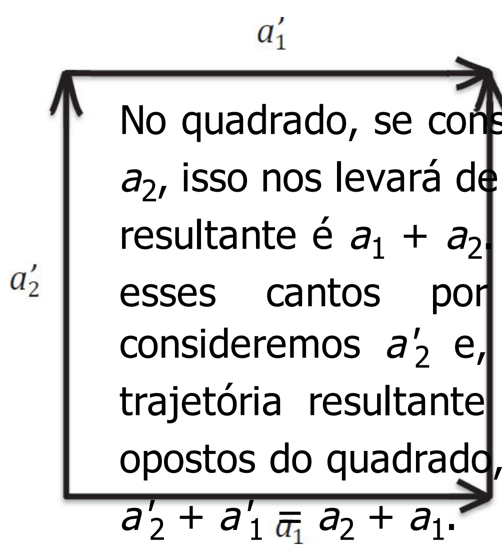
18. Por outro lado, como discutimos na nota 10 do capítulo 5, o grupo de tranças B_n pode ser interpretado como o grupo fundamental do espaço de polinômios mônicos de grau n, com n raízes distintas. Escolhemos como ponto de referência P, ou

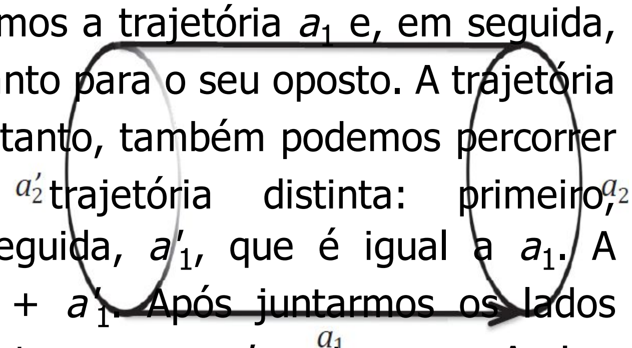
seja, o polinômio $(x - 1)(x - 2) \ldots (x - n)$, com as raízes 1, 2,…, n (essas são os “prendedores” da trança).

19. Para ver se as duas trajetórias comutam mutuamente, observemos se o toro pode ser obtido juntando os lados opostos de um quadrado (polígono com 4 vértices). Quando juntamos dois lados horizontais, a_1 e a'_1, obtemos um cilindro.



Juntando os círculos nas extremidades opostas do cilindro (que é o que os outros dois lados verticais do quadrado, a_2 e a'_2, se transformam após a primeira junção), obtemos um toro. Então, observamos que os lados a_1 e a_2 se transformam nas duas trajetórias fechadas independentes do toro. Notemos que, nele, todos os quatro cantos representam o mesmo ponto, e, assim, essas duas trajetórias se tornam fechadas – começam e terminam no mesmo ponto P. Além disso, $a_1 = a'_1$, pois os juntamos, e, da mesma forma, $a_2 = a'_2$.



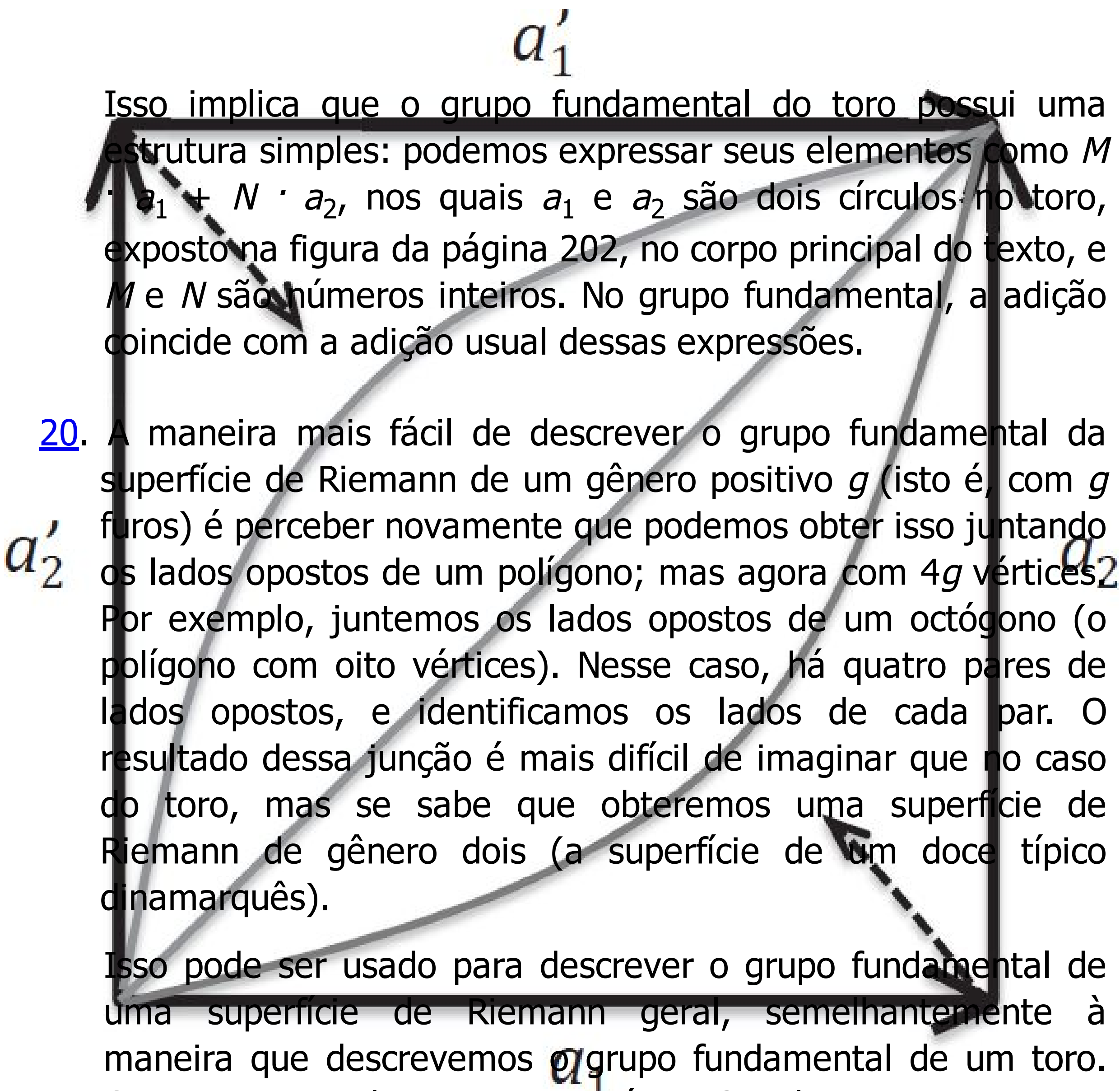


No quadrado, se considerarmos a trajetória a_1 e, em seguida, a_2, isso nos levará de um canto para o seu oposto. A trajetória resultante é $a_1 + a_2$. No entanto, também podemos percorrer esses cantos por uma trajetória distinta: primeiro, consideremos a'_2 e, em seguida, a'_1, que é igual a a_1. A trajetória resultante é $a'_2 + a'_1$. Após juntarmos os lados opostos do quadrado, a'_1 se torna a_1, e a'_2 se torna a_2. Assim, $a'_2 + a'_1 = a_2 + a_1$.

Agora, observemos que tanto $a_1 + a_2$ como $a_2 + a_1$ pode ser deformados na trajetória diagonal, ou seja, uma linha reta ligando os dois cantos opostos, como exposto na figura abaixo (as setas tracejadas mostram como se deformam cada uma das duas trajetórias).

Isso significa que as trajetórias $a_1 + a_2$ e $a_2 + a_1$ originam o mesmo elemento no grupo fundamental do toro. Demonstramos que

$$a_1 + a_2 = a_2 + a_1.$$



Isso implica que o grupo fundamental do toro possui uma estrutura simples: podemos expressar seus elementos como $M \cdot a_1 + N \cdot a_2$, nos quais a_1 e a_2 são dois círculos no toro, exposto na figura da página 202, no corpo principal do texto, e M e N são números inteiros. No grupo fundamental, a adição coincide com a adição usual dessas expressões.

20. A maneira mais fácil de descrever o grupo fundamental da superfície de Riemann de um gênero positivo g (isto é, com g furos) é perceber novamente que podemos obter isso juntando os lados opostos de um polígono; mas agora com $4g$ vértices. Por exemplo, juntemos os lados opostos de um octógono (o polígono com oito vértices). Nesse caso, há quatro pares de lados opostos, e identificamos os lados de cada par. O resultado dessa junção é mais difícil de imaginar que no caso do toro, mas se sabe que obteremos uma superfície de Riemann de gênero dois (a superfície de um doce típico dinamarquês).

Isso pode ser usado para descrever o grupo fundamental de uma superfície de Riemann geral, semelhantemente à maneira que descrevemos o grupo fundamental de um toro. Como no caso do toro, construímos $2g$ elementos no grupo fundamentais da superfície de Riemann de gênero g, considerando as trajetórias ao longo de $2g$ lados consecutivos do polígono (cada um dos $2g$ lados restantes será identificado com um desses). Denotemos o elementos por a_1, a_2, …, a_{2g}. Eles gerarão o grupo fundamental de nossa superfície de Riemann, no sentido de que qualquer elemento desse grupo pode ser obtido adicionando-os, possivelmente diversas vezes. Por exemplo, para $g = 2$, temos o seguinte elemento: $a_3 + 2a_1 + 3a_2 + a_3$ (mas note que não podemos reescrever isso como $2a_3 + 2a_1 + 3a_2$, pois a_3 não comuta com a_2 e a_1; assim, não podemos mover a_3 da extremidade direita para a esquerda).

Como no caso do toro, ao expressarmos a trajetória que liga dois cantos opostos do nosso polígono de duas maneiras distintas, obtemos uma relação entre eles, generalizando a relação de comutatividade do caso do toro:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2g-1} + a_{2g} = a_{2g} + a_{2g-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Isso, na realidade, acaba se revelando a única relação entre esses elementos; assim, obtemos uma descrição concisa do grupo fundamental: ele é gerado por a_1, a_2, …, a_{2g}, sujeito à essa relação.

21. Para explicar isso mais precisamente, consideremos todas as funções racionais de nossa superfície de Riemann, no sentido da nota 13 acima. Elas são análogas aos números racionais. O grupo de Galois pertinente é definido como o grupo de simetrias de um corpo numérico obtido juntando as soluções das equações polinomiais, como $x^2 = 2$, com os números racionais. Da mesma forma, podemos juntar as soluções das equações polinomiais com as funções racionais na superfície de Riemann X. Constata-se que quando fazemos isso, obtemos

funções racionais em outra superfície de Riemann X', que é uma “cobertura” de X; isto é, temos uma aplicação X'

$\longmapsto$

X, com fibras finitas. Nessa situação, o grupo de Galois consiste dessas simetrias de X', que deixam todos os pontos de X inalterados. Em outras palavras, essas simetrias agem ao longo das fibras da aplicação X'

$\longmapsto$

X.

Agora observe que, se tivermos uma trajetória fechada na superfície de Riemann X, começando e terminando num ponto P, em X, podemos pegar cada ponto de X' na fibra em P, e “seguilo” ao longo dessa trajetória, Quando voltarmos, alcançaremos, em geral, um ponto diferente na fibra em P, e, assim, obteremos uma transformação dessa fibra. Esse é o fenômeno da monodromia, que será discutido com mais detalhes no capítulo 15. Essa transformação da fibra pode ser rastreada em relação a um elemento do grupo de Galois. Portanto, obtemos um vínculo entre o grupo fundamental e o grupo de Galois.

Capítulo 10 – No loop

1. A palavra “especial” refere-se às transformações ortogonais que preservam a orientação – essas são precisamente as rotações da esfera. Um exemplo de transformação ortogonal que não preserva a orientação (e, portanto, não pertence ao $SO(3)$) é um reflexo em relação a um dos planos de coordenadas. O grupo $SO(3)$ está intimamente relacionado com o grupo $SU(3)$, que discutimos no capítulo 2, em relação

aos quarks (o grupo unitário especial do espaço tridimensional). O grupo $SU(3)$ é definido analogamente ao $SO(3)$; substituímos o espaço tridimensional *real* pelo espaço tridimensional *complexo.*

2. No entanto, outra maneira de perceber que o círculo é unidimensional é nos lembrarmos que ele pode ser considerado um conjunto de soluções reais da equação $x^2 + y^2 = 1$, como discutimos no capítulo 9. Assim, o círculo é o conjunto de pontos no plano limitado por uma equação. Portanto, sua dimensão é a do plano, que é dois, menos o número de equação, que é um.

3. A citação aparece no livro de anotações de Duchamp, intitulado *À l'Infinitif,* como mencionada em "Henri Poincaré, Marcel Duchamp and innovation in science and art", de Gerald Holton. Em: Leonardo, vol. 34, 2001, p. 130.

4. Linda Dalrymple Henderson, "The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art". Em: MIT Press, 2013, p. 493.

5. Gerald Holton, ibid., p. 134.

6. Charles Darwin, Autobiographies, Penguin Classics, 2002, p. 30.

7. Para obter mais detalhes, ver, por exemplo, de Shing-Tung Yau e Steve Nadis, The Shape of Inner Space, Basic Books, 2010.

8. Constata-se que a dimensão desse grupo é igual a $n(n - 1)/2$. Em outras palavras, para descrever um elemento desse grupo, precisamos de $n(n - 1)/2$ coordenadas independentes (no

caso de $n = 3$, precisamos de $3(3 - 1)/2 = 3$ coordenadas, como vimos no texto principal).

9. Matematicamente, cada loop pode ser considerado a imagem de um "aplicação" específico do círculo no espaço tridimensional; isto é, a regra que atribui a cada ponto φ, no círculo, um ponto $f(\varphi)$, no espaço tridimensional. Somente consideramos aplicações "lisas". Em termos gerais, isso significa que o loop não possui nenhum ângulo ou canto agudo, e, assim, parece o loop exposto na figura do texto principal.

   Em um amplo sentido, uma aplicação de uma variedade S para uma variedade M é uma regra que atribui a cada ponto s, em S, um ponto em M, denominado a imagem de s.

10. Ver, por exemplo, de Brian Greene, *The Elegant Universe*, Vintage Books, 2003.

11. Mais precisamente, um loop em $SO(2)$ é uma coleção $\{f(\varphi)\}$ de elementos de $SO(3)$, parametrizado pelo ângulo φ (que é uma coordenada do círculo). Dado um segundo loop, que é uma coleção $\{g(\varphi)\}$, componhamos as duas rotações, $f(\varphi) \circ g(\varphi)$, para cada φ. Então, obtemos uma nova coleção $\{f(\varphi) \circ g(\varphi)\}$, que é outro loop em $SO(3)$. Portanto, para cada par de loops em $SO(3)$, produzimos um terceiro loop. Essa é a regra de multiplicação no grupo de loops. O elemento identidade do grupo de loops é o loop concentrado na identidade de $SO(3)$; isto é, $f(\varphi)$ é o elemento identidade de $SO(3)$ para todos φ. O loop inverso do loop $\{f(\varphi)\}$ é o loop $\{f(\varphi)^{-1}\}$. É fácil verificar que todos os axiomas do grupo são válidos. Portanto, o espaço de loops de $SO(3)$ é, de fato, um grupo.

12. Para observar isso, consideremos um exemplo mais simples: o espaço de loop do plano. O plano possui duas coordenadas: x e y. Portanto, o loop do plano é igual à coleção de pontos do plano com coordenadas $x(\varphi)$ e $y(\varphi)$, um para cada ângulo φ, entre 0 e 360 graus (por exemplo, as fórmulas $x(\varphi) = \cos(\varphi)$, $y(\varphi) = \text{seno}(\varphi)$ descrevem um loop específico: o círculo de raio 1, com centro na origem). Portanto, para determinar esse loop, precisamos especificar uma coleção infinita de pares de números, $(x(\varphi), y(\varphi))$; um par para cada ângulo φ. Eis por que o espaço de loops do plano é infinito-dimensional. Pelo mesmo motivo, o espaço de loops de qualquer variedade de dimensão finita também é dimensão infinita

13. Citado em "René Descartes", de R. E. Langer. Em: *The American Monthly*, vol. 44, No. 8, outubro de 1937, p. 508.

14. O plano tangente é o mais próximo da esfera entre todos os planos que passam por esse ponto. Só a toca nesse único ponto; se movermos esse plano, mesmo um pouco (de modo que ainda passe pelo mesmo ponto fixo na esfera), obteremos um plano que cruza a esfera em mais pontos.

15. Por definição, a álgebra de Lie de um determinando grupo de Lie é o espaço plano (como uma linha, um plano etc.) que é mais próximo desse grupo de Lie entre todos os outros espaços planos que passam pelo ponto do grupo de Lie que corresponde à identidade.

16. Um círculo geral não possui um ponto especial. No entanto, o *grupo circular* possui: é o elemento identidade desse grupo, que é um ponto especial do círculo. Ele deve ser especificado, para converter um círculo num grupo.

17. Eis uma definição mais precisa de um espaço vetorial:

Após escolhermos um sistema de coordenadas num espaço plano n-dimensional, identificamos os pontos desse espaço com n-tupios de números reais, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; os números x_i sendo as coordenadas de um ponto. Em particular, há um ponto especial $(0, 0, \ldots, 0)$, no qual todas as coordenadas são iguais a 0. Essa é a origem.

Agora, definamos um ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nesse espaço. Determinamos uma simetria de nosso espaço que envia qualquer outro ponto $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ para $(z_1 + x_1, z_2 + x_2, \ldots, z_n + x_n)$. Geometricamente, podemos considerar essa simetria como a mudança de nosso espaço n-dimensional na direção do intervalo orientado ligando a origem e o ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Essa simetria é chamada de *vetor*, sendo, em geral, representada por esse intervalo orientado. Denotemos esse vetor por $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Há uma correspondência de um a um entre os pontos do espaço plano n-dimensional e os vetores. Por esse motivo, o espaço plano com um sistema de coordenadas fixo pode ser visto como o espaço dos vetores. Portanto, nós o denominamos *espaço vetorial.*

A vantagem de pensar em termos de vetores, em vez de pontos, é que temos duas operações naturais dos vetores. A primeira é a operação de adição de vetores, que transforma um espaço vetorial num grupo. Como explicado no capítulo 2, as simetrias podem ser compostas e, portanto, formam um grupo. A composição das simetrias de mudança descrita no parágrafo anterior fornece a seguinte regra de adição de vetores:

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle + \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle = \langle y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n \rangle$$

O elemento identidade do grupo de vetores é o vetor <0, 0, …, 0>. E o inverso aditivo do vetor <x_1, x_2, …, x_n> é o vetor <$-x_1$, $-x_2$, …, $-x_n$>.

A segunda é a operação de multiplicação dos vetores por números reais. O resultado da multiplicação de um vetor <x_1, x_2, …, x_n> por um número real k é <kx_1, kx_2, …, kx_n>.

Portanto, um espaço vetorial contém duas estruturas: adição, satisfazendo as propriedades de um grupo, e multiplicação por números. Essas estruturas devem satisfazer propriedades naturais.

Então, qualquer espaço tangente é um espaço vetorial, e, portanto, qualquer álgebra de Lie é um espaço vetorial.

O que está descrito acima é a noção de um espaço vetorial em termos de números reais. De fato, as coordenadas dos vetores são números reais e, assim, podemos multiplicar os vetores por números reais. Se, nessa descrição, substituirmos números reais por números complexos, obteremos a noção de um espaço vetorial em termos de números complexos.

18. Geralmente, a operação numa álgebra de Lie é denotada por colchetes; assim, se

$\vec{a}$

e

$\vec{b}$

denotam dois vetores numa álgebra de Lie (que é um espaço vetorial, como explicado na nota anterior), então o resultado dessa operação neles é denotado por

$[\vec{a}, \vec{b}]$

. Isso satisfaz as seguintes propriedades:

$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$, $[\vec{a} + \vec{b}, c] =$

$[\vec{a}, c] + [\vec{b}, c]$, $[k\vec{a}, \vec{b}] = k[\vec{a}, \vec{b}]$

para qualquer número *k*, e a assim chamada identidade de Jacobi:

$$[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] + [[\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}] + [[\vec{c}, \vec{a}], \vec{b}] = 0.$$

19. O produto vetorial de dois vetores no espaço tridimensional,

$\vec{a}$

e

$\vec{b}$

, é o vetor, denotado por

$\vec{a} \times \vec{b}$

, que é perpendicular ao plano contendo

$\vec{a}$

e

$\vec{b}$

, com comprimento igual ao produto dos comprimentos de

$\vec{a}$

e

$\vec{b}$

e o seno do ângulo entre eles, e, dessa maneira, o triplo dos vetores

$\vec{a}$

,

$\vec{b}$

e

$\vec{a} \times \vec{b}$

possui orientação positiva (isso pode ser expresso pela assim chamada regra da mão direita).

20. Por exemplo, a álgebra de Lie do grupo de Lie *SO*(3) é o espaço vetorial tridimensional. Portanto, a álgebra de Lie do grupo de loops de *SO*(3) consiste de todos os loops nesse espaço tridimensional. No espaço vetorial, o produto vetorial fornece uma estrutura de álgebra de Lie desses loops. Portanto, dados dois loops, produzimos um terceiro, embora não seja fácil descrever o que é em palavras.

21. Mais precisamente, uma álgebra de Kac–Moody é uma extensão da álgebra de Lie de um grupo de loops por meio de um espaço unidimensional. Para obter mais detalhes, ver, de Victor Kac, *Infinite-dimensional Lie Algebras* (terceira edição), Cambridge University Press, 1990.

22. Os modelos com simetria de álgebra de Virasoro são denominados teorias conformes de campos, apresentadas inicialmente pelos físicos russos Alexander Belavin, Alexander Polyakov e Alexander Zamolodchikov, em 1984. Esse trabalho seminal valeu-se dos resultados obtidos por Feigin e Fuchs, e também por Victor Kac.

23. Os mais conhecidos são os modelos de Wess–Zumino–Witten. Para obter mais detalhes, ver, de Edward Frenkel e David Ben-Zvi, *Vertex Algebras* (segunda edição), American Mathematical Society, 2004.

Capítulo 11 – Conquistando o topo

1. Eis uma construção precisa: vamos supor que temos um elemento do grupo de loops de *SO*(3), que é uma coleção

$\{g(\varphi)\}$ de elementos de $SO(3)$, parametrizado pelo ângulo φ (a coordenada no círculo). Por outro lado, um elemento do espaço de loops da esfera é uma coleção $\{f(\varphi)\}$ de pontos da esfera, parametrizado por φ. Dados essas coleções $\{g(\varphi)\}$ e $\{f(\varphi)\}$, construímos outro elemento do espaço de loops da esfera enquanto a coleção $\{g(\varphi)\ (f(\varphi))\}$. Isso significa que aplicamos a rotação $g(\varphi)$ ao ponto $f(\varphi)$ da esfera, independentemente para cada φ. Portanto, vemos que cada elemento do grupo de loops de $SO(3)$ origina uma simetria do espaço de loops da esfera.

2. Um ponto de uma variedade de bandeiras é uma coleção: uma linha num espaço n-dimensional fixo, um plano que contém essa linha, o espaço tridimensional que contém o plano, e assim por diante, até um hiperplano $(n - 1)$-dimensional contendo todos eles.

Comparemos isso com os espaços projetivos que eu estudara inicialmente: um ponto do espaço projetivo é apenas uma linha no espaço n-dimensional, nada mais.

No caso mais simples, $n = 2$, nosso espaço fixo é bidimensional, e, assim, a única alternativa que temos é aquela de uma linha (há apenas um plano, isto é, o próprio espaço). Portanto, nesse caso, a variedade de bandeiras é igual ao espaço projetivo, e, no fim das contas, coincide com a esfera. É importante observar que aqui consideramos linhas, planos etc., num espaço complexo (não num espaço real), e apenas aqueles que passam através da origem de nosso espaço n-dimensional fixo.

O próximo exemplo é $n = 3$; assim, temos um espaço tridimensional. Nesse caso, o espaço projetivo consiste de todas as linhas nesse espaço tridimensional, mas a variedade de bandeiras consiste de pares: uma linha e um plano contendo a variedade (há apenas um único espaço tridimensional). Portanto, nesse caso, há uma diferença entre o espaço projetivo e a variedade de bandeiras. Podemos considerar a linha como o mastro de uma bandeira e o plano como o pano dela. Daí o nome “variedade de bandeiras”.

3. Boris Feigin e Edward Frenkel, “A family of representations of affine Lie algebras”. Em: *Russian Mathematical Surveys*, vol. 43, No. 5, 1988, pp. 221-222.

Capítulo 12 – Árvore do conhecimento

1. Mark Saul, “Kerosinka: An episode in the history of Soviet mathematics”. Em: *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 46, novembro de 1999, pp. 1217–1220.

2. Tempos depois, soube que Gelfand, que colaborou com cardiologistas (pelo mesmo motivo que Yakov Isaevich trabalhou com urologistas), também utilizou com sucesso essa abordagem na pesquisa médica.

Capítulo 14 – Amarrando os feixes da sabedoria

1. Uma definição precisa de espaço vetorial foi dada na nota 17 do capítulo 10.

2. No caso da categoria de espaços vetoriais, os morfismos de um espaço vetorial V_1 para um espaço vetorial V_2 são as assim chamadas transformações lineares de V_1 para V_2. Esses são aplicações f de V_1 para V_2, de modo que

$f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$

, para dois vetores quaisquer

$\vec{a}$

e

$\vec{b}$

em V_1, e

$f(k\cdot\vec{a}) = k\cdot f(\vec{a})$

, para qualquer vetor

$\vec{a}$

em V_1. e número *k.* Em particular, os morfismos de um dado espaço vetorial *V* para si mesmo são as transformações lineares de *V* para si mesmo. O grupo de simetria de *V* consiste daqueles morfismos que possuem um inverso.

3. Ver, por exemplo, de Benjamin C. Pierce, "Basic Category Theory for Computer Scientists". Em: MIT Press, 1991.

De Joseph Goguen, "A categorical manifesto". Em: *Mathematical Structures in Computer Science,* vol. 1,1991, 49–67.

Em Steve Awodey, *Category Theory,* Oxford University Press, 2010.

4. Ver, por exemplo, http://goo.gl/ZFUtkL e as referências contidas neste link.

5. Ver, por exemplo, de Masaki Kashiwara e Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds,* Springer-Verlag, 2010.

6. Essa propriedade surpreendente da aritmética módulo números primos possui uma explicação simples se a observarmos do ponto de vista da teoria de grupos. Consideremos os elementos diferentes de zero do corpo finito: 1, 2,…, $p - 1$. Eles formam um grupo sobre multiplicação. De fato, o elemento identidade relacionado à multiplicação é o número 1: se multiplicarmos qualquer elemento a por 1, obteremos de volta a. E cada elemento possui um inverso, como explicado na nota 8 do capítulo 8: para qualquer a, em $\{1, 2, \ldots, p - 1\}$, há um elemento b, de modo que $a \cdot b = 1$ módulo p.

Esse grupo possui $p-1$ elementos. Há um fato geral que vale para *qualquer* grupo finito G com elementos N: a N-ésima potência de cada elemento a desse grupo é igual ao elemento identidade (que denotaremos por 1),

$$a^N = 1.$$

Para demonstrar isso, consideremos os seguintes elementos do grupo G: 1, a, a^2, … Como o grupo G é finito, esses elementos não podem ser todos distintos. Deve haver repetições. Seja k o menor número natural, de modo que a^k seja igual a 1, ou a^j para algum $j = 1, \ldots, k - 1$. Vamos supor que seja o último caso. Deixemos a^{-1} denotar o inverso de a, de modo que $a \cdot a^{-1} = 1$, e consideremos sua j-ésima potência $(a^{-1})^j$. Multipliquemos os dois lados da equação $a^k = a^j$ por $(a^{-1})^j$, na direita. Cada vez que encontrarmos $a \cdot a^{-1} = 1$, substituimos por 1. A multiplicação por 1 não altera o resultado e, assim, sempre podemos remover 1 do produto. Vemos, então, que cada a^{-1} cancelará um dos elementos a. Portanto, o lado esquerdo será igual a a^{k-j}, e o lado direito será igual a 1. Obtemos que $a^{k-j} = 1$. No entanto, $k - j$ é menor que k, e isso contradiz nossa escolha de k. Portanto, a primeira repetição de nossa lista terá necessariamente a forma $a^k = 1$, de modo que os elementos $1, a, a^2, \ldots, a^{k-1}$ sejam todos distintos. Isso significa que formam um grupo de k elementos: $\{1, a, a^2, \ldots, a^{k-1}\}$. É um subgrupo de nosso grupo original G de N elementos, no sentido que é um subconjunto de elementos de G, de modo que o resultado da multiplicação de dois elementos quaisquer desse subconjunto é novamente um elemento do subconjunto; esse subconjunto contém o elemento identidade de G, e esse subconjunto contém o inverso de cada um dos seus elementos.

Agora, sabemos que o número de elementos de qualquer subgrupo sempre divide o número de elementos do grupo. Esse enunciado é denominado teorema de Lagrange. Deixarei que você o demonstre (ou você pode simplesmente pesquisar no Google).

Aplicando o teorema de Lagrange ao subgrupo $\{1, a, a^2, \ldots, a^{k-1}\}$, que possui k elementos, verificamos que k deve dividir N, ou seja, o número de elementos do grupo G. Portanto, $N = km$, para algum número natural m. Mas como $a^k = 1$, então

$$a^N = (a^k) \cdot (a^k) \cdot \ldots \cdot (a^k) = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1,$$

que é o que queríamos demonstrar.

Voltemos ao grupo $\{1, 2, \ldots, p - 1\}$ com respeito à multiplicação. Ele possui $p - 1$ elementos. Esse é nosso grupo G; assim, nosso N é igual a $p - 1$. Aplicando o resultado geral nesse caso, verificamos que $a^{p-1} = 1$ módulo p, para todos os elementos a em $\{1, 2, \ldots, p - 1\}$. No entanto,

$$a^p = a \cdot a^{p-1} = a \cdot 1 = a \text{ módulo } p.$$

É fácil perceber que a última fórmula realmente vale para qualquer número inteiro a se estipularmos que

$$x = y \text{ módulo } p$$

sempre que $x - y = rp$, para algum número inteiro r.

Esse é o enunciado do pequeno teorema de Fermat. Fermat enunciou-o pela primeira vez numa carta a seu amigo: "Vou lhe enviar uma demonstração, mas receio que seja muito longa."

7. Até agora, consideramos a aritmética módulo um número primo p. No entanto, constata-se que há um enunciado análogo ao pequeno teorema de Fermat na aritmética módulo um número natural qualquer n. Para explicar o que é isso, preciso evocar a função de Euler Φ, que discutimos em conjunção com os grupos de tranças, no capítulo 6 (no meu projeto de grupo de tranças, descobrira que os números de Betti dos grupos de tranças são expressos em termos dessa função). Recordo que $\Phi(n)$ é o número de números naturais entre 1 e $n - 1$, que são números relativamente primos com n; isto é, não têm divisores comuns com n (diferentes de 1). Por exemplo, se n for um número primo, então todos os números entre 1 e $n - 1$ serão números relativamente primos com n, e, assim, $\Phi(n) = n - 1$.

Logo, o análogo da fórmula $a^{p-1} = 1$ módulo p, que demonstramos na nota anterior, é a fórmula

$$a^{\Phi(n)} = 1 \text{ módulo } n.$$

Ela é válida para qualquer número natural n e qualquer número natural a, que é relativamente primo com n. Demonstra-se exatamente da mesma maneira que antes:

consideramos o conjunto de todos os números naturais entre 1 e $n - 1$ que são relativamente primos com n. Há $\Phi(n)$ deles. É fácil perceber que eles formam um grupo ligado à operação de multiplicação. Portanto, pelo teorema de Lagrange, para qualquer elemento desse grupo, sua $\Phi(n)$-ésima potência é igual ao elemento identidade.

Consideremos, por exemplo, o caso em que n é o produto de dois números primos. Isto é, $n = pq$, onde p e q são dois números primos distintos. Nesse caso, os números que não são relativamente primos com n são divisíveis por p ou por q. O primeiro tem a forma pi, onde $i = 1, \ldots, q - 1$ (existem $q - 1$ desses), e o último tem a forma qj, onde $j = 1, \ldots, p - 1$ (existem $p - 1$ desses). Portanto, verificamos que

$$\Phi(n) = (n - 1) - (q - 1) - (p - 1) = (p - 1)(p - 1).$$

Logo, temos

$$a^{(p-1)(q-1)} = 1 \text{ módulo } pq$$

para qualquer número a que não é divisível por p e q. E é fácil perceber que a fórmula

$$\mathrm{a}^{1+m(p-1)(q-1)} = a \text{ módulo } pq$$

é válida para qualquer número natural a e qualquer número inteiro m.

A equação é a base de um dos algoritmos de criptografia mais utilizados, denominado algoritmo RSA (em homenagem a Ron Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, que o descreveram em 1977). A ideia é selecionarmos dois números primos p e q (há diversos algoritmos para gerá-los) e que o produto pq seja n. O número n é tornado público, mas os números primos p e q, não. Em seguida, selecionamos um número e que é relativamente primo com $(p-1)(q-1)$. Esse número também é tornado público.

O processo de criptografia converte qualquer número a (como o número de um cartão de crédito) em a^e módulo n:

$$a \mapsto b = a^e \text{ módulo } n.$$

Constata-se que há uma maneira eficiente de reconstruir a a partir de a^e. A saber, achamos um número d entre 1 e $(p-1)(q-1)$, de modo que

$$de = 1 \text{ módulo } (p-1)(q-1).$$

Em outras palavras,

$$de = 1 + m(p-1)(q-1)$$

para algum número natural m. Então,

$$a^{de} \text{ módulo } n = a^{1+m(p-1)(q-1)} \text{ módulo } n = a \text{ módulo } n$$

de acordo com as fórmulas acima.

Portanto, dado $b = a$ e, podemos recuperar o número original da seguinte maneira:

$$b \mapsto b^d \text{ módulo } n.$$

Resumindo: tornamos públicos os números n e e, mas mantivemos secreto o número d. A criptografia é dada pela fórmula

$$a \mapsto b = a^e \text{ módulo } n.$$

Qualquer pessoa pode fazer isso, pois *e* e *n* estão publicamente disponíveis.

A decriptação é dada pela fórmula

$$b \mapsto b^d \text{ módulo } n.$$

Aplicada em a^e, ela devolve-nos o número original *a*. No entanto, somente aqueles que conhecem *d* conseguem fazer isso.

O motivo pelo qual esse é um bom sistema de criptografia é que, para encontrarmos *d,* o que permite a reconstrução dos números sendo criptografados, temos de saber o valor de $(p-1)(q-1)$. No entanto, para isso precisamos conhecer os valores de *p* e *q,* que são os dois números primos divisores de *n*. Eles são mantidos em segredo. Para *n* suficientemente grande, usando métodos conhecidos de fatoração de números primos, podemos levar muitos meses para descobrir *p* e *q*, mesmo utilizando uma rede de computadores de grande eficácia. Por exemplo, em 2009, um grupo de pesquisadores com centenas de computadores paralelos foi incapaz de fatorar em números primos um número de 232 dígitos; o trabalho levou dois anos. Ver: http://goo.gl/GUA9od

No entanto, se alguém conseguisse propor uma maneira mais eficiente de "fatorar" números naturais em números primos (por exemplo, usando um computador quântico), então teríamos uma ferramenta para quebrar esse sistema de criptografia. É por isso que muitas pesquisas são direcionadas para a fatoração em números primos.

8. No caso dos números racionais, vimos que as equações da forma $x^2 = 2$ podem ter soluções entre os números racionais, e, nesse caso, criaríamos um novo sistema numérico, adicionando essas soluções, tais como

$\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$

. Depois, concluímos que inverter

$\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$

é uma simetria desse novo sistema numérico.

Da mesma forma, podemos considerar as equações polinomiais na variável x, tais como $x^2 = 2$ ou $x^3 - x = 1$, e equações no corpo finito $\{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$. E também podemos nos perguntar se essa equação pode ser resolvida para x dentro do corpo finito. Se não houver uma solução, então poderemos juntar as soluções ao corpo finito, da mesma maneira que juntamos

$\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$

aos números racionais. Dessa maneira, criamos novos corpos finitos.

Por exemplo, se $p = 7$, a equação $x^2 = 2$ possui duas soluções, 3 e 4, pois

$$3^2 = 9 = 2 \text{ módulo } 7, 4^2 = 16 = 2 \text{ módulo } 7.$$

Note que 4 é –3 em relação à aritmética módulo 7, pois 3 + 4 = 0 módulo 7. Assim, as duas soluções da equação $x^2 = 2$ são os inversos um do outro, exatamente como

$\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$

são os inversos um do outro. Isso não surpreende: as duas soluções da equação $x^2 = 2$ serão sempre os inversos um do outro, pois, se $a^2 = 2$, então $(-a)^2 = (-1)^2a^2 = 2$ também. Isso significa que, se $p \neq 2$, sempre existirão dois elementos do corpo finito que os quadrados se ajustam ao mesmo número, e existirão os negativos mútuos (se p ≠ 2, então p será necessariamente ímpar, e, então, $-a$ não poderá ser igual a a, pois, caso contrário, p seria igual a $2a$). Portanto, somente metade dos elementos diferentes de zero do corpo finito {0, 1, 2, ..., $p - 1$} são quadrados.

(A célebre lei da reciprocidade de Gauss descreve quais números n são quadrados da aritmética módulo p e quais não são. Isso está além do escopo deste livro, mas digamos que a resposta só depende do valor de p módulo $4n$. Assim, por exemplo, já sabemos que $n - 2$ é um quadrado módulo $p = 7$. Nesse caso, $4n = 8$. Portanto, também será uma quadrados módulo qualquer número primo p que é igual a 7 módulo 8, independentemente de quão grande. Esse é um resultado impressionante!)

Se $p = 5$, então $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 4$, e $4^2 = 1$ módulo 5. Assim, 1 e 4 são quadrados módulo 5, mas 2 e 3 não são. Em particular, vimos que não há soluções para a equação $x^2 = 2$ no corpo finito {0, 1, 2, ..., $p - 1$}, da mesma forma que havia no caso dos números racionais. Portanto, podemos criar um novo sistema numérico, estendendo o corpo finito {0, 1, 2, ..., $p - 1$} juntando as soluções de $x^2 = 2$. Voltemos a denotá-las por

$\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$

(no entanto, temos de lembrar que esses não são os mesmos números que juntamos aos números racionais antes).

Obtemos um novo corpo finito, que consiste de números da forma

$$a + b$$

$\sqrt{2}$

,

na qual a e b estão em {0, 1, 2, 3, 4}. Como temos dois parâmetros a e b assumindo valores 0, 1, 2, 3 ou 4, verificamos que esse novo sistema numérico possui 5 · 5 = 25 elementos. Em um ampio sentido, qualquer extensão finita do corpo {0, 1, …, p – 1} possui p^m elementos, para algum número natural m.

Agora vamos supor que juntamos todas as soluções de todas as equações polinomiais de uma variável no corpo finito {1, 1, 2, …, p – 1}. Então, obtemos um novo sistema numérico denominado o *fecho algébrico* do corpo finito. O corpo finito original possui p elementos. Constata-se que esse fecho possui uma infinidade de elementos. Nossa próxima questão é: qual é o grupo de Galois desse fecho algébrico? São as simetrias, que preservam as operações de adição e multiplicação e enviam os elementos do corpo original de p elementos para si mesmas.

Se começarmos com o corpo dos números racionais e considerarmos seu fecho algébrico, então o grupo de Galois correspondente será muito complicado. De fato, o Programa de Langlands foi criado, em parte, para descrever esse grupo de Galois e suas representações em termos de análise harmônica.

Em contraste, o grupo de Galois do fecho algébrico do corpo finito {0, 1, 2, …, p – 1} acaba se revelando muito simples. A saber, já conhecemos uma dessas simetrias: a Frobenius, que é a operação de elevar à p-ésima potência: a

$\mapsto$

a^p. De acordo com o pequeno teorema de Fermat, a Frobenius preserva todos os elementos do corpo finito original de p elementos. Também preserva a adição e a multiplicação no fecho algébrico:

$$(a + b)^p = a^p + b^p, \qquad (ab)^p = a^p b^p.$$

Portanto, a Frobenius pertence ao grupo de Galois do fecho algébrico do corpo finito.

Denotemos a Frobenius por F. Sem dúvida, qualquer potência de número inteiro F^n da Frobenius também é um elemento do grupo de Galois. Por exemplo, F^2 é a operação de elevação à p^2-ésima potência,

$a \mapsto a^{p^2} = (a^p)^p$

. As simetrias F^n, onde n se estende a todos os números inteiros, formam um subgrupo do grupo de Galois, que é denominado o grupo de Weil, em homenagem a André Weil. O próprio grupo de Galois é o que se denomina uma completude do grupo de Weil; além das potências de número inteiro de F, também tem, como elementos, certos limites de F^n enquanto n tende ao ∞. No entanto, num sentido apropriado, a Frobenius gera o grupo de Galois.

Eis um exemplo de como a Frobenius atua sobre os elementos do fecho algébrico de um corpo finito. Consideremos o caso de *p* = 5, e os elementos do fecho algébrico acima formam

$$a + b\sqrt{2},$$

em que *a* e *b* são 0,1,2,3 ou 4. Esse sistema numérico possui uma simetria que troca

$\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$

:

$$a + b\sqrt{2} \quad \mapsto \quad a - b\sqrt{2},$$

em paralelo com o que acontece quando juntamos

$\sqrt{2}$

aos números racionais. O que surpreende (e o que não tem análogo no caso dos números racionais) é que essa simetria inversa é, de fato, igual à Frobenius. De fato, aplicado a Frobenius a

$\sqrt{2}$

significa elevá-la à quinta potência, e verificamos que

$$(\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2},$$

pois 4 = –1 módulo 5. Para *p* = 5, a Frobenius envia

$a + b\sqrt{2}$

em

$a - b\sqrt{2}$

. O mesmo é válido para qualquer número primo *p,* de modo que a equação $x^2 = 2$ não possui soluções no corpo finito {0, 1, 2, …, $p - 1\}$.

9. A simetria de um espaço vetorial n-dimensional, mais adequadamente denominada transformação linear (ver nota 2), pode ser representada por uma matriz, que é o arranjo quadrado de números a_{ij}, em que i e j se estendem de 1 a n, e n é a dimensão do espaço vetorial. Então, o traço é a soma dos elementos diagonais dessa matriz; isto é, de todos a_{ii}, com i se estendendo de 1 a n.

10. No presente contexto, voltar significa encontrar, para uma dada função f, um feixe, de modo que, para cada ponto s em nossa variedade, o traço de Frobenius na fibra em s é igual ao valor de f em s. Qualquer número dado pode ser realizado como traço de uma simetria de um espaço vetorial. O difícil é combinar esses espaços vetoriais numa coleção coerente, satisfazendo as propriedades de um feixe.

Capítulo 15 – Uma dança delicada

1. Uma representação do grupo de Galois, num grupo H, é a regra que atribui, a cada elemento do grupo de Galois, um elemento de H. Deve satisfazer a condição de que, se a, b são dois elementos do grupo de Galois e $f(a)$, $f(b)$ são os elementos de H atribuídos a eles, então, para o produto ab no grupo de Galois, deve ser atribuído o produto $f(a)\ f(b)$, em H. Um nome mais adequado para isso é um *homomorfismo* do grupo de Galois em relação a H.

2. Para deixar isso mais preciso, vamos lember da nação de um espaço vetorial n-dimensional relative à nota 17 do capítulo 10. Como discutimos no capítulo 2, uma representação n-dimensional nal de um dado grupo é a rega que atribui uma

simetria S_g de um espaço vetorial *n*-dimensional para cada elemento *g* desse grupo. Essa regra deva satisfazer a seguinte propriedade: para dois elementos quaisquer do grupo, *g* e *h*, e seu produto *gh*, a simetria S_{gh} é igual à composição de S_g e S_h. Também se exige que, para cada elemento *g*, tenhamos

$S_g(\vec{a}+\vec{b}) = S_g(\vec{a}) + S_g(\vec{b})$

e $S_g(k \cdot \vec{a}) = k \cdot S_a(\vec{a})$

para quaisquer vetores

$\vec{a}$

,

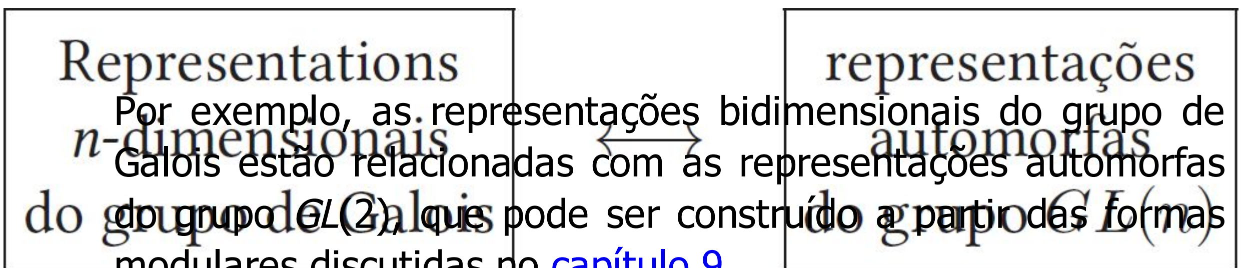
$\vec{b}$

e um número *k* (essas simetrias são denominadas transformações lineares; ver a nota 2 do capítulo 14).

O grupo de todas as transformações lineares passíveis de serem invertidas de um espaço vetorial *n*-dimensional é denominado grupo linear geral. Denota-se por *GL*(*n*). Portanto, de acordo com a definição do parágrafo anterior, uma representação *n*-dimensional de um dado grupo Γ é igual à representação de Γ em *GL*(*n*) (ou, um homomorfismo de Γ em *GL*(*n*); ver nota 1).

Por exemplo, no capítulo 10, discutimos sobre uma representação tridimensional do grupo *SO*(3). Cada elemento do grupo *SO*(3) é uma rotação de uma esfera, a qual atribuímos a rotação correspondente do espaço vetorial tridimensional contendo a esfera (acaba se revelando uma transformação linear). Isso nos dá uma representação de *SO*(3), em *GL*(3) (ou, de modo equivalente, um homomorfismo de *SO*(3) em *GL*(3)). Intuitivamente, podemos pensar em uma rotação como “agindo” no espaço vetorial tridimensional, rotando cada vetor nesse espaço em relação a outro vetor.

Em um lado da relação de Langlands (também conhecida como a correspondência de Langlands), consideramos as representações *n*-dimensionais do grupo de Galois. No outro lado, temos funções automorfas que podem ser utilizadas para construir as assim chamadas representações automorfas de outro grupo *GL*(*n*) de simetrias do espaço vetorial *n*-dimensional, embora não sobre os números reais, mas sobre as assim chamadas *adèles.* Não vou tentar explicar o que são *adèles,* mas o diagrama a seguir mostra esquematicamente a aparência de uma relação de Langlands:



Por exemplo, as representações bidimensionais do grupo de Galois estão relacionadas com as representações automorfas do grupo *GL*(2), que pode ser construído a partir das formas modulares discutidas no capítulo 9.

Uma generalização dessa relação é obtida por meio da substituição do grupo *GL*(*n*) por um grupo de Lie mais geral. Logo, no lado direito da relação, temos representações automorfas de *G*, em vez de *GL*(*n*). No lado esquerdo, temos representações do grupo de Galois no grupo dual de Langlands ^LG, em vez de *GL*(*n*) (ou, de modo equivalente, homomorfismos do grupo de Galois relativos ao grupo ^LG). Para obter mais detalhes, ver, por exemplo, meu artigo: “Lectures on the Langlands Program and conformal field theory”. Em: Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry II, eds. P. Cartier, e.a., pp. 387–536, Springer-Verlag, 2007. Disponível on-line, em: http://goo.gl/XbdMY6

3. Ver o vídeo em: http://goo.gl/kNMzii

4. Essa dança se chama Binasuan. Ver, por exemplo, este vídeo: http://goo.gl/rtREjE

5. Para a construção dessa trajetória e a explicação de por que, se atravessarmos ela duas vezes, obteremos uma trajetória trivial, ver, por exemplo, de Louis H. Kaufmann, *Knots and Physics* (terceira edição), pp. 419–420, World Scientific, 2001.

6. Em outras palavras, o grupo fundamental de $SO(3)$ consiste de dois elementos: um é a identidade e o outro é sua trajetória, cujo quadrado é a identidade.

7. O nome matemático desse grupo é $SU(2)$. Consiste das transformações "unitárias especiais" do espaço vetorial complexo bidimensional. Esse grupo está relacionado com o grupo $SU(3)$, discutido no capítulo 2 em relação aos quarks, que consiste de transformações unitárias especiais do espaço vetorial complexo tridimensional.

8. Mais precisamente, a ascensão da trajetória fechada que construímos (correspondente ao primeiro giro completo da caneca) a partir do grupo $SO(3)$, em relação à sua cobertura dupla, ou seja, o grupo $SU(2)$, será uma trajetória que começa e termina em pontos diferentes de $SU(2)$ (ambos os quais se projetam sobre o mesmo ponto em $SO(3)$); assim, não é uma trajetória fechada em $SU(2)$.

9. Em geral, esse relacionamento é mais sutil, mas, neste livro, para simplificar as coisas, assumiremos que o dual do grupo dual é o próprio grupo.

10. Numa superfície de Riemann, um *G*-fibrado principal (ou *G*-fibrado) é uma fibração sobre a superfície de Riemann, de modo que todas as fibras são cópias da "complexificação" do grupo *G* (define-se substituindo, na definição do grupo, os números reais por números complexos). Os pontos do espaço de módulos (mais adequadamente denominado pilha) dos G-fibrados em *X* são classes de equivalência de *G*-fibrados em *X.*

Neste livro, para simplificar a exposição, não fazemos uma distinção entre um grupo de Lie e sua "complexificação".

11. No grupo fundamental, identificamos duas trajetórias fechadas quaisquer, que podem ser deformadas mutuamente. Como nenhuma trajetória fechada no plano que não dá voltas em torno do ponto removido pode ser contraída a um ponto, os elementos não triviais do grupo fundamental são aquelas trajetórias fechadas que dão voltas ao redor desse ponto (elas não podem ser contraídas – o ponto que removemos do plano é um obstáculo para isso).

É fácil perceber que duas trajetórias fechadas quaisquer, com o mesmo índice, podem ser deformadas mutuamente. Assim, o grupo fundamental do plano sem um ponto é nada além do grupo de números inteiros. Note que essa discussão remonta ao que falamos no capítulo 5 a respeito do grupo de tranças com dois fios, que também constatamos ser igual ao grupo de números inteiros. Isso não é uma coincidência, pois o espaço de pares dos pontos distintos do plano é topologicamente equivalente ao plano com o ponto removido.

12. O motivo pelo qual a monodromia assume valores no grupo circular deve-se à conhecida fórmula de Euler

$$e^{\theta\sqrt{-1}} = \cos(\theta) + \text{seno}(\theta)\sqrt{-1}.$$

Em outras palavras, o número complexo

$$e^{\theta\sqrt{-1}}$$

é representado pelo ponto do círculo unitário correspondente ao ângulo θ, como medido, em radianos. Lembremos que 2π radianos é igual a 360 graus (esse corresponde à rotação completa do círculo). Portanto, o ângulo θ medido em radianos é o ángulo $360\ \theta/2\pi$ graus.

Um caso especial dessa fórmula, para $\theta = \pi$, é

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1,$$

que Richard Feynman chamou de "uma das fórmulas mais notáveis, quase espantosas de toda a matemática". Desempenhou um papel importante no romance de Yoko Ogawa *The Housekeeper and the Professor,* Picador, 2009. Outro caso especial, não menos importante, é

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = 1$$

.

Isso significa que o círculo unitário no plano complexo com a coordenada *t,* em que a solução de nossa equação diferencial é definida, consiste de todos os pontos da forma

$$t = e^{\theta\sqrt{-1}}$$

, na qual θ se situa entre 0 e 2π. Conforme nos movemos ao longo do círculo unitário no sentido anti-horário, estamos avaliando nossa solução $x(t) = t^n$, nesses pontos

$$t = e^{\theta\sqrt{-1}}$$

, deixando o ângulo θ crescer de 0 a 2π (em radíanos). Percorrer o círculo completo significa definir θ igual a 2π.

Portanto, para obtermos o valor correspondente de nossa solução, precisamos substituir

$$t = e^{\theta\sqrt{-1}}$$

em t^n. O resultado é

$$e^{2\pi n\sqrt{-1}}$$

. No entanto, o valor original da solução é obtido substituindo $t = 1$ por t^n, que é 1. Logo, verificamos que, quando atravessamos a trajetória fechada, indo no sentido anti-horário ao longo do círculo unitário, nossa solução fica multiplicada por

$$e^{2\pi n\sqrt{-1}}$$

. E essa é a monodromia ao longo dessa trajetória.

Essa monodromia

$$e^{2\pi n\sqrt{-1}}$$

é um número complexo que pode ser representado por um ponto no círculo unitário, em *outro* plano complexo. Esse ponto corresponde ao ângulo $2\pi n$ radianos, ou $360n$ graus, que é o que quisemos demonstrar. De fato, multiplicando qualquer número complexo z por

$$e^{2\pi n\sqrt{-1}}$$

equivale, geometricamente, a rotar o ponto no plano correspondente à z em $360n$ graus. Se n for um número inteiro, então

$$e^{2\pi n\sqrt{-1}}$$

= 1, e, assim, não ocorre nenhuma monodromia, mas, se n não for um número inteiro, obteremos uma monodromia não trivial.

Para evitar confusão, quero enfatizar que temos dois planos complexos distintos aqui: um é o plano em que nossa solução é definida, o "*t*-plano". O outro é aquele em que representamos a monodromia, e que não tem nada a ver com o *t*-plano.

Recapitulando: interpretamos a monodromia da solução ao longo de uma trajetória fechada com o índice +1, no *t*-plano, como o ponto de outro círculo unitário. Da mesma forma, se o índice da trajetória for *w,* então a monodromia ao longo dessa trajetória será

$$e^{2\pi wn\sqrt{-1}}$$

, que equivale à rotação de $2\pi nw$. radianos, ou $360wn$ graus. Portanto, a monodromia origina uma representação do grupo fundamental no grupo circular. Nessa representação, a trajetória no *t*-plano sem um ponto, cujo índice é *w*, corresponde à rotação de $360wn$ graus.

13. Note que é importante removermos um ponto, a origem, do plano. Caso contrário, qualquer trajetória pode sofrer um colapso, e o grupo fundamental seria trivial. Portanto, nenhuma monodromia seria possível. Somos forçados a remover esse ponto porque nossa solução, t^n, não é definida na origem, se n não é um número natural ou 0 (nesse caso, não há monodromia).

14. Mais precisamente, nem todas as representações do grupo fundamental em ^LG podem ser obtidas dos opers, e, nesse diagrama, nós nos limitamos àquelas que podem. Para outras representações, a questão permanece em aberto.

15. Edward Frenkel, *Langlands Correspondence for Loop Groups,* Cambridge University Press, 2007. Versão on-line está disponível em: http://goo.gl/HqC7Rd

Capítulo 16 – Dualidade quântica

1. Você pode estar querendo saber o que aconteceu entre 1991 e 2003. Bem, neste livro, meu principal objetivo é falar a respeito dos aspectos do Programa de Langlands que considero mais interessantes e como foram realizadas as descobertas nessa área, das quais tive a sorte de participar. Não estou procurando relatar a história completa da minha vida até hoje. No entanto, se você estiver curioso, durante esses anos, trouxe minha família da Rússia para os Estados Unidos; mudei-me para Berkeley, na Califórnia; apaixonei-me e me desapaixonei, casei e me divorciei, orientei diversos alunos de doutorado, viajei e palestrei em todo o mundo, publiquei um livro e dezenas de monografias. Continuo tentando desvendar os mistérios do Programa de Langlands em diferentes domínios: da geometria aos sistemas integráveis, dos grupos quânticos à física. Guardarei os detalhes dessa parte da minha jornada para outro livro.

2. Ver: http://goo.gl/BqRZeS

3. G.H. Hardy, A Mathematician's Apology, Cambridge University Press, 2009, p. 135.

4. Depoimento no Congresso dos Estados Unidos de R. R. Wilson, 17 de abril de 1969.
Citado a partir de: http://goo.gl/SBbrEB

5. No vácuo, as equações de Maxwell tem a forma

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

na qual

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\vec{E}$ denota o campo elétrico e

$\vec{B}$

denota o campo magnético (para simplificar as fórmulas, estamos escolhendo uma sistema de unidades em que a velocidade da luz é igual a 1). É evidente que, se enviamos

$$\vec{E} \mapsto \vec{B}, \qquad \vec{B} \mapsto -\vec{E}$$

as equações do lado esquerdo se tornarão as equações do lado direito, e vice-versa. Portanto, cada equação individual muda, mas o sistema de equações, não.

6. Ver o site Flicker de Dayna Mason: `http://goo.gl/4RZI63`

7. Esse grupo de calibre *SU*(3) não deve ser confundido com outro grupo *SU*(3) discutido no capítulo 2, que foi utilizado por Gell-Mann e outros para classificar partículas elementares (é denominado "grupo de sabor"). O grupo de calibre *SU*(3) tem a ver com a característica dos quarks que se denomina "cor". Constatase que cada quark pode ter três cores diferentes, e o grupo de calibre *SU*(3) é responsável pela troca dessas cores. Por causa disso, a teoria de calibre que descreve a interação dos quarks é denominada cromodinâmica quântica. David Gross, David Politzer e Frank Wilczek ganharam o Prêmio Nobel pela descoberta impressionante da assim chamada liberdade assintótica na cromodinâmica quântica (e outras teorias de calibre não abelianas), que ajudou a explicar o comportamento misterioso dos quarks.

8. D.Z. Zhang, “C.N. Yang and contemporary mathematics”. Em: *Mathematical Intelligencer,* vol. 15, No. 4, 1993, pp. 13–21.

9. Albert Einstein, *Geometry and Experience,* discurso na Academia Prussiana de Ciências, em Berlim, 27 de janeiro de 1921. Traduzido em G. Jeffrey e W. Perrett, Geometry and Experience in Si-delights on Relativity, Methuen, 1923.

10. Eugene Wigner, “The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences”. Em: Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 13, 1960, pp. 1–14.

11. C. Montonen e D. Olive, “Magnetic monopoles as gauge particles?”. Em: Physics Letters B, vol. 72, 1977, pp. 117–120.

12. P. Goddard, J. Nuyts e D. Olive, “Gauge theories and magnetic charge”. Em: *Nuclear Physics B,* vol. 125, 1977, pp. 1–28.

13. S_e é o conjunto de representações unidimensionais complexas do toro máximo de *G,* e S_m é o grupo fundamental do toro máximo de *G*. Se *G* for o grupo circular, então seu toro máximo será o próprio grupo circular, e cada um desses dois conjuntos está numa correspondência de um para um com o conjunto de números inteiros.

Capítulo 17 – Revelando as ligações ocultas

1. O espaço $M(X, G)$ pode ser descrito de diversas maneiras; por exemplo, como espaço das soluções de um sistema de equações diferenciais em *X*, estudado inicialmente por Hitchin (ver o artigo na nota 19 abaixo para obter mais detalhes). Neste capítulo, uma descrição que será útil é que $M(X, G)$ é o espaço de módulos das representações do grupo fundamental

da superficie de Riemann *S,* na "complexificação" do grupo *G* (ver a nota 10 do capítulo 15). Isso significa que essa representação é atribuida a cada ponto de *M*(*X, G*).

2. Ver o vídeo da palestra de Hitchin, no Fields Institute, em: http://goo.gl/tqcHMD

3. Aqui estou me referindo ao trabalho recente de Ngô Bảo Châu a respeito de demonstração do "Lema Fundamental" do Programa de Langlands. Ver, por exemplo, o seguinte artigo, de David Nadler: "The geometric nature of the fundamental lemma". Em: *Bulletin of the American Mathematical Society,* vol. 49,2012, pp. 1–50.

4. Lembremos que, no modelo sigma, tudo é calculado por meio da soma de todos as aplicações de uma superfície de Riemann fixa ∑ na variedade alvo *S*. Na teoría das cordas, damos mais um passo: além da soma de todos as aplicações de um ∑ fixo em *S*, como fazemos normalmente no modelo sigma, também somamos todas as possíveis superfícies de Riemann ∑ (a variedade alvo *S* permanece completamente fixa – esse é o nosso espaço-tempo). Em particular, somamos as superfícies de Riemann de gênero arbitrário.

5. Para obter mais detalhes da teoria de supercordas, ver, de Brian Greene, The Elegant Universe, Vintage Books, 2003; The Fabric of the Cosmos: Space, Time, and the Texture of Reality, Vintage Books, 2005.

6. Para obter mais detalhes das variedades de Calabi–Yau e seu papel na teoria de supercordas, ver, de Shing-Tung Yau e Steve Nadis, The Shape of Inner Space, Basic Books, 2010, capítulo 6.

7. Um toro também possui dois parâmetros contínuos: basicamente, os raios R_1 e R_2, que discutimos neste capítulo, mas os ignoraremos para o propósito dessa discussão.

8. Uma resolução que foi muito discutida recentemente é a ideia de que cada uma dessas variedades origina seu próprio universo, com suas próprias leis científicas. Isso se alia com a versão do princípio antrópico: nosso universo é selecionado entre essas variedades pelo fato de que as leis científicas nelas permitem vida inteligente (de modo que a pergunta "por que nosso universo é assim?" possa ser respondida). No entanto, essa ideia, que recebeu o nome de "paisagem da teoria das cordas" ou "multiverso", foi recebida com muito ceticismo nas áreas científica e filosófica.

9. Diversas propriedades interessantes das teorias quânticas de campos, em inúmeras dimensões, foram descobertas ou elucidadas ao se ligarem essas teorias com a teoria de supercordas, utilizando redução dimensional ou estudando branas. De certo modo, a teoria das supercordas foi utilizada como uma usina de produção e análise das teorias quânticas de campos (predominantemente, supersimétricas). Por exemplo, dessa maneira, obtemos uma bela interpretação da dualidade eletromagnética das teorias de calibre supersimétricas quadridimensionais. Assim, embora ainda não saibamos se a teoria das supercordas pode descrever a física de nosso universo (e ainda não entendamos completamente o que é a teoria de supercordas), ela já produziu diversos *insights* de grande eficácia relativos à teoria quântica de campos. Ela também conduziu a diversos avanços na matemática.

10. A dimensão do espaço de módulos de Hitchin $M(X, G)$ é igual ao produto da dimensão do grupo G (que é igual à dimensão de ${}^{L}G$) e $(g - 1)$, onde g denota o gênero da superfície de Riemann X.

11. Para obter mais detalhes a respeito de branas, ver, de Lisa Randall, *Warped Passages: Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions,* Harper Perennial, 2006; sobretudo, o capítulo IV.

12. Mais precisamente, as A-branas em $M(X, G)$ são objetos de uma categoria; o conceito que discutimos no capítulo 14. As B-branas em $M(X, G)$ são objetos de outra categoria. O enunciado da simetria especular homológica é que essas duas categorias são mutuamente equivalentes.

13. Antón Kapustin e Edward Witten, "Electric-magnetic duality and the geometric Langlands Program". Em: *Communications in Number Theory and Physics,* vol. 1, 2007, pp. 1–236.

14. Para obter mais detalhes sobre a T-dualidade, ver o capítulo 7 do livro de Yau e Nadis mencionado na nota 6.

15. Para obter mais detalhes sobre a conjectura SYZ, ver o capítulo 7 do livro de Yau e Nadis mencionado na nota 6.

16. Mais precisamente, cada fibra é o produto de n círculos, onde n é um número natural par; assim, é um análogo n-dimensional de um toro bidimensional. Note também que a dimensão da base da fibração de Hitchin e a dimensão de cada fibra tórica sempre serão mutuamente iguais.

17. No capítulo 15, discutimos uma construção distinta, em que os feixes automorfos eram obtidos a partir das representações das álgebras de Kac–Moody. Espera-se que as duas construções estejam relacionadas, mas, no momento da redação do livro, essa relação ainda era desconhecida.

18. Edward Frenkel e Edward Witten, "Geometric endoscopy and mirror symmetry". Em: Communications in Number Theory and Physics, vol. 2, 2008, pp. 113–283. Disponível on-line, em: http://goo.gl/dsBHHd

19. Edward Frenkel, "Gauge theory and Langlands duality". Em: *As-térisque,* vol. 332, 2010, pp. 369–403. Disponível on-line em: http: //goo.gl/8zmlQP

20. Henry David Thoreau, A Week on the Concord and Merrimack Rivers, Penguin Classics, 1998, p. 291.

Capítulo 18 – Em busca da fórmula do amor

1. C. P. Snow, *The Two Cultures,* Cambridge University Press, 1998.

2. Thomas Farber e Edward Frenkel, The Two-Body Problem, Andrea Young Arts, 2012. Para obter mais detalhes, ver: http://thetwobodyproblem.com

3. Michael Harris, *Further investigations of the mind-body problem,* capítulo de um livro inédito. Disponível on-line, em: http://goo.gl/zlSXJT

4. Henry David Thoreau, A Week on the Concord and Merrimack Rivers, Penguin Classics, 1998, p. 291.

5. E.T. Bell, Men of Mathematics, Touchstone, 1986, p. 16.

6. Robert Langlands, “Is there beauty in mathematical theories?”. Em: The Many Faces of Beauty, ed. Vittorio Hösle, University of Notre Dame Press, 2013. Disponível em: http://goo.gl/hX5L21

7. Yuri I. Manin, Mathematics as Metaphor: Selected Essays, American Mathematical Society, 2007, p. 4.

8. Durante séculos, os filósofos debateram a ontologia da matemática. Neste livro, o ponto de vista que defendo refere-se, em geral, ao platonismo matemático. Note, porém, que há distintos tipos de platonismo, e também existem outras interpretações filosóficas da matemática. Ver, por exemplo, de Mark Balaguer, “Mathematical Platonism”. Em: Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy, Bonnie Gold e Roger Simons (eds.), Mathematics Association of America, pp. 179–204, e referências neste.

9. Roger Penrose, The Road to Reality, Vintage Books, 2004, p. 15.

10. Ibid., pp. 13–14.

11. Kurt Gödel, Collected Works, volume III, Oxford University Press, 1995, p. 320.

12. Ibid, p. 323.

13. Roger Penrose, Shadows of the Mind, Oxford University Press, 1994, seção 8.47.

14. Na memorável decisão *Gottschaík versus Benson,* 409 U.S. 63 (1972), a Suprema Corte dos Estados Unidos declarou (citando casos anteriores apresentados à Corte): "uma verdade científica, ou a expressão matemática da mesma, não é uma invenção patenteável… Um princípio, no abstrato, é uma verdade fundamental; uma causa original; um motivo; os mesmos não podem ser patenteados, pois ninguém pode reivindicar direito exclusivo a respeito dos mesmos… Aquele que descobre um fenômeno desconhecido da natureza até agora não tem direito a um monopólio do mesmo que seja reconhecido pela lei."

15. Edward Frenkel, Andrey Losev e Nikita Nekrasov, "Instantons beyond topological theory I". Em: *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu,* vol. 10, 2011, 463–565; no artigo, há uma nota de rodapé explicando que a fórmula (5.7) desempenhou a função da "fórmula do amor", em *Rites of Love and Math.*

16. Consideramos o modelo mecânico quântico supersimétrico na esfera (denotado aqui por

$\mathbb{P}^1$

) e a função de correlação dos dois observáveis, denotados por *F* e *ω*. Em nzossa teoria, a função de correlação é definida como a integral que aparece no lado esquerdo da fórmula. No entanto, nossa teoria também prediz uma expressão diferente para isso: uma soma nos "estados intermediários" que aparecem no lado direito. A consistência de nossa teoria requer que os dois lados sejam mutuamente iguais. E, de fato, eles são; isso é o que a nossa fórmula afirma.

17. *Le Monde Magazine,* 10 de abril de 2010, p. 64.

18. Laura Spinney, Erotic equations: Love meets mathematics on film, New Scientist, 13 de abril de 2010. Disponível on-line, em: http: //ritesofloveandmath.com

19. Hervé Lehning, "La dualité entre l'amour et les maths". Em: *Tangente Sup,* vol. 55, maio-junho de 2010, pp. 6–8. Disponível on-line, em: http://ritesofloveandmath.com

20. Utilizamos o poema *To the Many,* de Anna Akhmatova, grande poeta russa da primeira metade do século XX.

21. Norma Farber, A Desperate Thing, The Plowshare Press Incorporated, 1973, p. 21.

22. Carta de Einstein para Phyllis Wright, 24 de janeiro de 1936, como citada no livro de Walter Isaacson *Einstein: His Life and Universe,* Simon & Schuster, 2007, p. 388.

23. David Brewster, Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton, vol. 2, Adamant Media Corporation, 2001 (reimpressão da edição de 1855 de Thomas Constable and Co.), p. 407.

Epílogo

1. Edward Frenkel, Robert Langlands e Ngô Báo Châu, "Formule des Traces et Fonctorialité: le Début d'un Programme". Em: *Annales des Sciences Mathématiques du Québec* 34(2010) 199–243. Disponível on-line, em: http://goo.gl/gU16NE

Edward Frenkel, "Langlands Program, trace formulas, and their geometrization". Em: *Bulletin of AMS,* vol. 50 (2013) 1–55. Disponível on-line, em: http://goo.gl/5X1Ilj

Glossário de termos

Álgebra de Kac–Moody. A álgebra de Lie do grupo de loops de um determinado grupo de Lie, estendida por uma linha extra.

Álgebra de Lie. O espaço tangente relativo a um grupo de Lie, no ponto correspondente ao elemento identidade desse grupo.

Análise harmônica. Um ramo da matemática que estuda a decomposição das funções em termos de harmônicos, como as funções seno e cosseno.

Aplicação de um conjunto (ou variedade), *M*, para outro conjunto (ou variedade), *N*. Uma regra que atribui um ponto de *N* a cada ponto de *M*.

Categoria. Uma estrutura algébrica composta de "objetos" e "morfismos" entre quaisquer pares de objetos. Por exemplo, espaços vetoriais formam uma categoria, assim como feixes numa variedade.

Círculo. Uma variedade que pode ser descrita como o conjunto de todos os pontos equidistantes de um determinado ponto no plano.

Composição (de duas simetrias). A simetria de um determinado objeto obtido por meio da aplicação de duas simetrias daquele objeto uma após a outra.

Conjectura de Shimura–Taniyama–Weil. O enunciado de que existe uma correspondência um-a-um entre equações cúbicas e as formas modulares, satisfazendo certas propriedades. Nessa correspondência, os números de soluções da equação cúbica módulo números primos são iguais aos coeficientes da forma modular.

Conjunto. Uma coleção de objetos, como o conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, N - 1\}$, para um dado número natural N.

Corpo finito. O conjunto de números naturais entre 0 e $p - 1$, no qual p é um número primo, ou sua extensão obtida por soluções adjacentes de uma equação polinomial de uma variável.

Corpo numérico. Um sistema numérico obtido juntando, aos números racionais, todas as soluções de uma coleção finita de polinômios de uma variável, cujos coeficientes são números racionais.

Correspondência. Uma relação entre objetos de dois tipos diferentes, ou uma regra que atribui objetos de um tipo a objetos de outro. Por exemplo, uma correspondência um-a-um.

Curva sobre corpo finito. Um objeto algébrico que inclui todas as soluções de uma equação algébrica de duas variáveis (como uma equação cúbica), com valores num corpo finito de p elementos e todas as suas extensões.

Dimensão. O número de coordenadas necessárias para descrever pontos de um determinado objeto. Por exemplo, uma linha e um círculo possuem dimensão 1, e um plano e uma esfera têm dimensão 2.

Dualidade. Equivalência entre dois modelos (ou teorias), de acordo com uma mudança prescrita de parâmetros e objetos.

Equação cúbica. Equação da forma $P(y) = Q(x)$, onde $P(y)$ é um polinômio de grau dois e $Q(x)$ é um polinômio de grau três. Um exemplo que é estudado em detalhes neste livro é a equação $y^2 + y = x^3 - x^2$.

Equação polinomial. Uma equação da forma $P = 0$, na qual P é um polinômio de uma ou mais variáveis.

Esfera. Uma variedade que pode ser descrita como o conjunto de todos os pontos num espaço tridimensional plano que são equidistantes de um determinado ponto.

Espaço de módulos de Hitchin. O espaço (ou variedade) cujos pontos são representações do grupo fundamental de uma determinada superfície de Riemann, num determinado grupo de Lie.

Espaço vetorial. O conjunto de todos os vetores num determinado espaço plano n-dimensional, envolvendo operações de adição de vetores e multiplicação de vetores por números, satisfazendo propriedades naturais.

Feixe. Uma regra que atribui um espaço vetorial para cada ponto de uma determinada variedade, satisfazendo certas propriedades naturais.

Feixe automorfo. Um feixe que substitui uma função automorfa na relação de Langlands geométrica, na coluna direita da pedra de Roseta de Weil.

Fibração. Vamos supor que temos duas variedades M e B, e uma aplicação de M para B. Para qualquer ponto em B, temos o conjunto de pontos em M mapeando para esse ponto, denominado a “fibra” sobre esse ponto. A variedade M é denominada uma fibração (ou um fibrado de fibras) sobre a “base” B, se todas essas fibras podem ser mutuamente identificadas (e cada ponto em B possui uma vizinhança *U*, cuja pré-imagem em *M* pode ser identificada com o produto de *U* e uma fibra).

Forma modular. Uma função no disco unitário satisfazendo propriedades especiais de transformação, conforme um subgrupo do grupo de simetria do disco (denominado grupo modular).

Função. Uma regra que atribui um número a cada ponto de um determinado conjunto ou variedade.

Função automorfa. Um tipo particular de função que aparece na análise harmônica.

Grupo. Um conjunto com uma operação (de modo variável, denominada composição, adição ou multiplicação), que atribui um elemento desse conjunto a qualquer par dos elementos (por exemplo, o conjunto de todos os números inteiros com a operação de adição). Essa operação deve satisfazer as seguintes propriedades: existência do elemento identidade, existência do inverso da cada elemento e associatividade.

Grupo abeliano. Um grupo em que o resultado da multiplicação de dois elementos quaisquer não depende da ordem pela qual eles são multiplicados. Por exemplo, o grupo circular.

Grupo circular. O grupo de rotações de qualquer objeto redondo, como uma mesa redonda. É um círculo com um ponto especial, isto é, o elemento identidade desse grupo. O grupo circular é o exemplo mais simples de um grupo de Lie.

Grupo de calibre. Um grupo de Lie que aparece numa teoria de calibre e determina, em particular, as partículas e as interações entre elas dentro daquela teoria.

Grupo de Galois. O grupo de simetrias de um corpo numérico, preservando as operações de adição e multiplicação.

Grupo de Lie. O espaço que também é uma variedade, de modo que a operação no grupo é uma aplicação lisa.

Grupo dual de Langlands. Um grupo de Lie atribuído a qualquer grupo de Lie *G* por meio de um procedimento especial. É denotado por ^{L}G.

Grupo fundamental. O grupo de todas as trajetórias fechadas contínuas em uma determinada variedade, começando e terminando num ponto.

Grupo não abeliano. Um grupo em que a multiplicação de dois elementos depende, em geral, da ordem pela qual são multiplicados. Por exemplo, o grupo $SO(3)$.

Loop. Uma curva fechada, como, por exemplo, um círculo.

Número complexo. Um número da forma

$$a + b\sqrt{-1}$$

, na qual *a* e *b* são dois números reais.

Número inteiro. Um número que é um número natural, ou 0, ou o negativo de um número natural.

Número natural. Número 1, ou qualquer número obtido por meio da adição de 1 a si mesmo diversas vezes.

Número primo. Um número natural que não é divisível por qualquer número natural diferente de si mesmo e de 1.

Polinômio de uma variável. Uma expressão da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, na qual x é uma variável e $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são números. Os polinômios de diversas variáveis são definidos da mesma maneira.

Relação de Langlands (ou correspondência de Langlands). Uma regra que atribui uma função automorfa (ou uma representação automorfa) a uma representação de um grupo de Galois.

Representação de um grupo. Uma regra que atribui uma simetria de um espaço vetorial a cada elemento de um determinado grupo, de modo que algumas propriedades naturais sejam satisfeitas. Em um amplo sentido, uma representação de um grupo G em outro grupo H é uma regra que atribui um elemento de H a cada elemento de G, de modo que algumas propriedades naturais sejam satisfeitas.

Simetria. Uma transformação de um determinado objeto que preserva suas propriedades, tais como forma e posição.

SO(3). O grupo de rotações de uma esfera.

Supersimetria. Um tipo de simetria na teoria quântica de campos que troca bósons e férmions.

Teoria. Um ramo específico da matemática ou física (como a teoria dos números) ou um modelo específico que descreva relações entre objetos (como a teoria de calibre com o grupo de calibre $SO(3)$).

Teoria de calibre. Um modelo físico de um tipo específico, descrevendo certos campos e interações entre eles. Há uma teoria (ou modelo) assim para qualquer grupo de Lie, denominado grupo de calibre. Por exemplo, a teoria de calibre que corresponde ao grupo circular é a teoria do eletromagnetismo.

Teoria quântica de campos. Esse termo pode se referir a dois conceitos distintos. Em primeiro lugar, pode ser um ramo da física que estuda modelos de interações de partículas quânticas e campos. Em segundo, um modelo *específico* desse tipo.

Último Teorema de Fermat. O enunciado segundo o qual, para qualquer número natural n maior que 2, não existem números naturais x, y e z de modo que $x^n + y^n = z^n$.

Variedade. Uma forma geométrica lisa, tal como um círculo, uma esfera ou a superfície de uma rosca.

1ª edição	Novembro de 2014
papel de miolo	Lux Cream 70g/m²
papel de capa	Cartão supremo 20g/m²
tipografia typesetter	Linux Libertine
	BooksInBytes